Notas de Análise Complexa

João Lopes Dias*
Departamento de Matemática, ISEG
Universidade Técnica de Lisboa
Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal

26 de Outubro de 2006

Resumo

Estas notas destinam-se à cadeira "Análise Real e Complexa" do 3º ano da Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão do ISEG - Universidade Técnica de Lisboa. Para as seguir pressupõe-se os conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Álgebra Linear e Análise Matemática em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^d$.

Conteúdo

*Email: jldias@iseg.utl.pt

1 O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é o espaço vectorial real de dimensão 2 com base $\{1, i\}$, onde se define a operação de multiplicação

$$(x+iy).(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

O **complexo conjugado** $\overline{z}$ de um número complexo $z = x+iy$ é definido como

$$\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy. \tag{1.2}$$

Assim, a parte real de z é

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i} = y$$

a parte imaginária. Na Figura 1 encontra-se esquematizado o plano complexo.

Exercício 1. *Calcule $z\overline{z}$.*

Observação 1. Note que

- $i^2 = (0+i)(0+i) = -1 + i0 = -1$
- se $z = z'$, então $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z'$ e $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'$

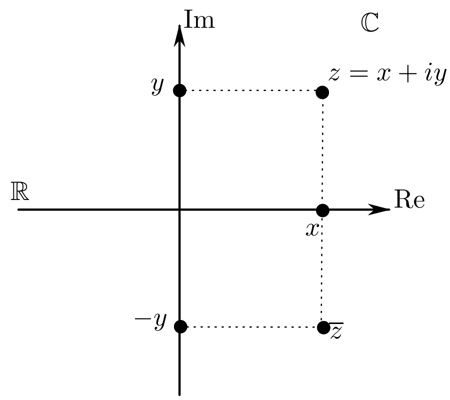

Figura 1: O plano complexo

- $\overline{z} = z$ sse $z \in \mathbb{R}$
- $\overline{\overline{z}} = z$

Exercício 2. *Prove as seguintes propriedades da conjugação:*

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

1.1 Estruturas métrica e topológica de $\mathbb{C}$

O **valor absoluto** (ou módulo ou norma) de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ indica a distância à origem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

como em $\mathbb{R}^2$. A **distância** entre dois pontos é então

$$d(z, z') = |z - z'|. \tag{1.4}$$

Estas norma e distância em $\mathbb{C}$ coincidem com as de $\mathbb{R}^2$.

Observação 2. Note que $|z|^2 \neq z^2$. De facto, $|z|^2$ é um número real para qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$, enquanto $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ só é real se z é real ou puro imaginário.

Exercício 3. *Mostre que*

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *e* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
4. $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'})$
5. $|z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{z'})$
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(desigualdade triangular)*

7. $|z - z'| \geq | \, |z| - |z'| \, |$

8. *$|\sum_{i=1}^{n} z_i z_i'| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i'|^2}$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

Consideramos a estrutura topológica de $\mathbb{C}$ (conjuntos abertos, fechados, interior, fronteira, exterior, fecho, conexo, compacto, etc.) a mesma de $\mathbb{R}^2$. Isto é, tendo em conta o isomorfismo[1] entre estes dois conjuntos que associa $z = x + iy$ ao par (x, y), temos uma correspondência biunívoca entre abertos de $\mathbb{C}$ e de $\mathbb{R}^2$. Em particular, um **aberto** em $\mathbb{C}$ é um conjunto que contém uma bola (disco)

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < r\} \tag{1.5}$$

para cada um dos seus pontos z_0.

Chama-se **região** em $\mathbb{C}$ a um aberto não vazio e conexo.

1.2 Propriedades algébricas

A adição de complexos é claramente comutativa, associativa, $0 = 0 + i0$ é o elemento neutro, e para cada $z \in \mathbb{C}$ existe o seu simétrico $-z$ tal que $z + (-z) = 0$.

Exercício 4. *Mostre que:*

1. *a multiplicação de complexos é associativa, comutativa e distributiva em relação à adição;*

2. *o único elemento neutro da multiplicação é o* 1;

3. *o único elemento absorvente da multiplicação é o* 0;

4. *existe um único inverso* z^{-1} *para cada* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *dado por*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Após resolver o exercício acima o teorema seguinte fica demonstrado.

Teorema 1.1. $\mathbb{C}$ *é um corpo.*

Observação 3.

- O quociente entre dois números complexos z e $z' \neq 0$ é $z/z' = z(z')^{-1}$.

- Como $\mathbb{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, não pode ser ordenado. Logo só teremos $z \leq z'$ se z e z' forem reais.

- O conjunto $\mathbb{C}$ pode ser interpretado como um espaço vectorial de dimensão 1 (com base e.g. $\{1\}$) sobre os complexos (i.e. os escalares estão no corpo $\mathbb{C}$).

[1] Um isomorfismo entre dois espaços A e B é uma bijecção $f \colon A \to B$ que preserva alguma propriedade dos espaços. Por exemplo, entre espaços vectoriais queremos que a linearidade sejam preservada (f e f^{-1} são lineares); entre corpos que se se preservem as operações de soma e produto (f e f^{-1} são homomorfismos); entre espaços topológicos que se preservem as estruturas topológicas (f e f^{-1} são contínuos), etc. Os espaços A e B dizem-se assim isomorfos, e escreve-se $A \simeq B$.

1.3 Interpretação geométrica de $\mathbb{C}$

1.3.1 Representação polar

- O módulo (ou norma ou valor absoluto) de $z = x + iy$ é

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.6}$$

- O **argumento** de $z = x + iy$ é dado pela função $\arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi, \pi]$ com

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \text{ e } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \text{ e } y < 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

A função $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é a inversa da função tangente restringida a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Podemos assim escrever qualquer número complexo na representação polar na forma

$$z = |z| \mathrm{e}^{i \arg z}. \tag{1.8}$$

onde $\mathrm{e}^{i \arg z} = \cos(\arg z) + i \sin(\arg z)$.

Exercício 5. *Mostre que* $\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2\pi n$ *com* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\arg(zz') \in]-\pi, \pi]$.

Fixemos um complexo $z' = x' + iy'$ qualquer. A multiplicação $z \mapsto z'z$ pode então ser interpretada como a composição entre uma rotação $\arg z \mapsto \arg z + \arg z'$, e uma homotetia[2] $z \mapsto |z'|\, z$. Isto é,

$$zz' = |z|\, |z'| \mathrm{e}^{i(\arg z + \arg z')}. \tag{1.9}$$

Vista em $\mathbb{R}^2$ a operação de multiplicação é dada pela transformação linear com a matriz na base canónica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Esta pode ser decomposta em duas outras transformações lineares: uma rotação por $\arg(z')$ dada pela matriz

$$R_{\arg z'} = \begin{bmatrix} \cos(\arg z') & -\sin(\arg z') \\ \sin(\arg z') & \cos(\arg z') \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

e a homotetia com matriz:

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

Exercício 6. *Mostre que*

$$\begin{bmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{bmatrix} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} R_{\arg z'}$$

[2] Transformação que preserva a direcção.

1.3.2 *Representação esférica

Para muitas aplicações é conveniente extender $\mathbb{C}$ introduzindo um ponto no infinito. Assim, definimos o plano complexo aumentado:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{1.13}$$

Assumimos que $z + \infty = \infty$ para $z \in \mathbb{C}$, e $z\infty = \infty$ se $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Contudo, não definimos $\infty + \infty$ nem 0∞.

Falta extender a noção de vizinhança do ponto ∞. Para isso definimos a bola (disco) em redor de ∞ com raio r da seguinte forma:

$$D_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > r\} \cup \{\infty\}. \tag{1.14}$$

Um conjunto em $\overline{\mathbb{C}}$ é aberto se contém um disco centrado em cada um dos seus pontos. Uma consequência imediata desta definição é que abertos em $\mathbb{C}$ são abertos em $\overline{\mathbb{C}}$.

Vamos agora ver que $\overline{\mathbb{C}}$ pode ser interpretado como a superfície esférica

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}. \tag{1.15}$$

Primeiro definimos a transformação $p \colon S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$, conhecida como projecção estereográfica,

$$p(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, & (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{(0,0,1)\} \\ \infty, & (x_1, x_2, x_3) = (0,0,1). \end{cases} \tag{1.16}$$

Exercício 7. **Mostre que a projecção estereográfica é bijectiva.*

Assim os espaços acima são de certa forma semelhantes. Devido a este facto, designa-se usualmente $\overline{\mathbb{C}}$ por esfera de Riemann. Não há contudo uma expressão simples para a soma e o produto na representação esférica.

1.4 O espaço complexo multidimensional $\mathbb{C}^d$

Paralemente à generalização de $\mathbb{R}$ para mais dimensões, também podemos definir o espaço $\mathbb{C}^d = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$. Assim, um vector complexo $z \in \mathbb{C}^d$ pode ser escrito como

$$z = (x_1 + iy_1, \dots, x_d + iy_d) = (x_1, \dots, x_d) + i(y_1, \dots, y_d).$$

2 Funções complexas elementares

2.1 Função exponencial

A função exponencial real $\exp \colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, é definida por qualquer das seguintes formas equivalentes:

- $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,
- a única solução da EDO $f' = f$ com $f(0) = 1$,
- a inversa da função $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$.

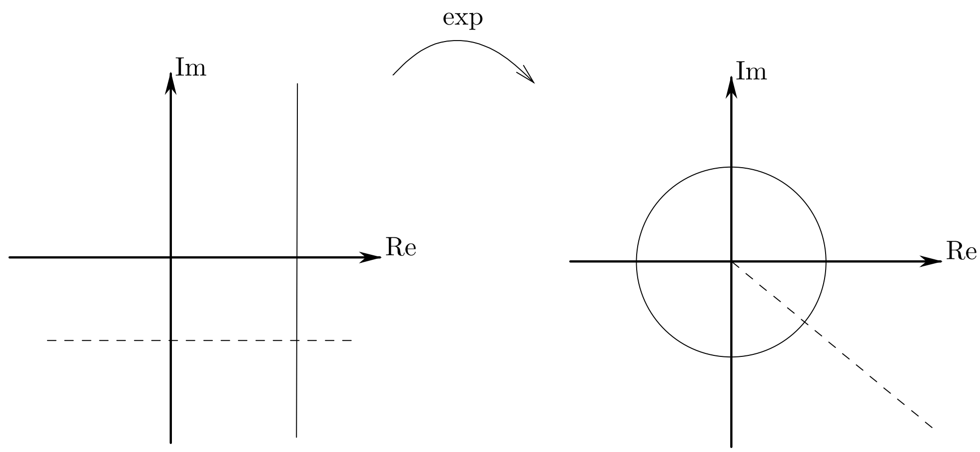

Figura 2: A acção da exponencial sobre rectas verticais e horizontais

Queremos generalizar esta função para o plano complexo. Assim, a exponencial complexa é definida como

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \exp(z) &= \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\mathrm{e}^{i\operatorname{Im} z}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observação 4.

- Se $z \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Im} z = 0$ e recuperamos a função exponencial real.
- Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ temos que $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ e $\arg \mathrm{e}^z = y$.

Exercício 8. *Mostre que, para $z, z' \in \mathbb{C}$,*

1. $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$
2. $\mathrm{e}^z \neq 0$
3. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ *sse* $z = z' + 2\pi i n$ *com* $n \in \mathbb{Z}$
4. $\exp$ *é uma função periódica*[3]*. Determine o período minimal* [4].
5. $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$

Exercício 9.

1. *Calcule* $\mathrm{e}^{i\pi/2}$, $\mathrm{e}^{i\pi}$, $\mathrm{e}^{i3\pi/2}$, $\mathrm{e}^{i2\pi}$,$|\mathrm{e}^{iy}|$.
2. *Quais as soluções de* $\mathrm{e}^z = 1$*?*

Na Figura 2 esquematiza-se a transformação de rectas verticais e horizontais em $\mathbb{C}$ pela função exponencial.

[3] f é uma função periódica com período $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ (ou w-periódica) se $f(z + w) = f(z)$, para qualquer z no domínio de f.

[4] I.e. o período $T \in \mathbb{C}$ tal que qualquer outro período $P \in \mathbb{C}$ é da forma $P = nT$ com $n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Função logaritmo

A função logaritmo real $\log\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ é definida como a inversa da exponencial: $\log \mathrm{e}^x = x = \mathrm{e}^{\log x}$. Para generalizarmos esta função a $\mathbb{C}$ teremos que ter em atenção que a exponencial é periódica, logo não tem uma única inversa. Restringimos assim a exponencial à faixa

$$A = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z \in]-\pi,\pi]\}$$

onde é injectiva. Além disso, como a exponencial nunca toma o valor zero, o domínio da função logaritmo não poderá conter zero. Porém, valores reais negativos estarão incluídos no domínio do logaritmo complexo, contrastando com o caso real. Assim, definimos

$$\begin{aligned} \log\colon \mathbb{C}-\{0\} &\to \mathbb{C} \\ \log(z) &= \log|z| + i\arg z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

com $\arg(z)\in]-\pi,\pi]$. Deste modo, se $z = x+iy \in \mathbb{C}-\{0\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\log z} &= \mathrm{e}^{\log|z|}\mathrm{e}^{i\arg z} = |z|\mathrm{e}^{i\arg z} = z \\ \log \mathrm{e}^z &= \log|\mathrm{e}^z| + i\arg \mathrm{e}^z = \log \mathrm{e}^x + iy = z. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Finalmente, o contra-domínio é $\log(\mathbb{C}-\{0\}) = A$.

Observação 5. Poder-se-ia definir outras funções logaritmo, bastando para isso considerar a função arg com valores em $[2\pi n, 2\pi(n+1)[$, $n\in\mathbb{Z}$, ou outros intervalos de comprimento 2π.

Exercício 10. *Prove que se* $z, z' \in \mathbb{C}-\{0\}$*, então* $\log(zz') = \log z + \log z' + 2\pi i n$ *com* $n\in\mathbb{Z}$ *tal que* $\operatorname{Im}\log(zz')\in]-\pi,\pi]$.

2.3 Funções trigonométricas

As funções trignométricas reais de variável real, o seno $\sin\colon \mathbb{R}\to[-1,1]$ e o cosseno $\cos\colon\mathbb{R}\to[-1,1]$ podem ser definidas das seguintes formas:

1. sendo θ o ângulo (no sentido anti-horário) entre o semi-eixo positivo das abcissas e o segmento de recta com extremos na origem e no ponto (x,y) de $\mathbb{R}^2$,
$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
2. $$\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.4}$$
3. $$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}, \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \tag{2.5}$$
4. a única solução da EDO $f''+f=0$
   - com $f(0)=0$ e $f'(0)=1$ é a função seno,
   - com $f(0)=1$ e $f'(0)=0$ é a função cosseno.

Queremos extender estas funções a $\mathbb{C}$. Para isso usamos a definição 3. Ou seja,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Exercício 11. *Mostre que*

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $\sin(z + z') = \sin z \, \cos z' + \cos z \, \sin z'$
3. $\cos(z + z') = \cos z \, \cos z' - \sin z \, \sin z'$

Exercício 12. *Determine se* sin *e* cos *são periódicas e os seus períodos minimais.*

2.4 Potências complexas

Dado $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$, queremos definir a potência complexa de um número complexo como

$$z^w = e^{w \log z} \tag{2.7}$$

de forma a generalizarmos a potência de reais. Logo, temos a seguinte propriedade: $(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w$. Porém, repare que, como $e^{2\pi i n} = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^w = (e^{\log z + 2\pi i n})^w = e^{w \log z} e^{2\pi i n w}. \tag{2.8}$$

Logo a potência de números complexos não pode ser definida univocamente para qualquer w.

Exercício 13. *Escreva os valores possíveis para i^i.*

Proposição 2.1.

- *Se $w = p/q \in \mathbb{Q}$ onde p e q são inteiros primos entre si, então $\#\{e^{2\pi i n w} \colon n \in \mathbb{Z}\} = q$,*
- *Se $w \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$, então $\#\{e^{2\pi i n w} \colon n \in \mathbb{Z}\} = \infty$.*

Demonstração. Para simplificar escrevemos $A_w = \{e^{2\pi i n w} \colon n \in \mathbb{Z}\}$. Comecemos com o caso $w = p/q \in \mathbb{Q}$. Cada $n \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito na forma $n = qm + r$ onde $m \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Então

$$e^{2\pi i n p/q} = e^{2\pi i m} e^{2\pi i r p/q} = e^{2\pi i r p/q}.$$

Como r pode assumir q valores, temos que $\#A_w = q$.

Para provar a segunda afirmação, procuramos uma contradição ao assumirmos que $\#A_w$ é finito para $w \notin \mathbb{Q}$. Assim, existem dois inteiros $n \neq m$ tais que

$$e^{2\pi i n w} = e^{2\pi i m w}.$$

Ora, isto implica que $2\pi i n w = 2\pi i m w + 2\pi i k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daqui resulta que $w = k/(n - m) \in \mathbb{Q}$, o que contradiz a hipótese. □

Observação 6. As funções polinomiais complexas na forma

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \tag{2.9}$$

estão bem definidas visto que cada termo tem uma potência com expoente inteiro (racional com $q = 1$).

Exercício 14. *Determine todas as soluções de $z^p = 1$ com $p \in \mathbb{Z}$.*

2.5 Polinómios e funções racionais

De acordo com o teorema fundamental da álgebra um polinómio de grau $N \in \mathbb{N}$ do tipo

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n,$$

com $c_n \in \mathbb{C}$ e $c_N \neq 0$, pode ser decomposto num produto

$$P(z) = c_N \prod_{n=1}^{N} (z - z_i),$$

onde $P(z_i) = 0$ define os zeros de P. Os zeros não são necessariamente distintos. A ordem de cada zero é assim o número de repetições do mesmo.

Uma **função racional** R é então definida como o quociente entre dois polinómios P e Q:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Assumimos que P não é divisível por Q, i.e. não têm zeros comuns. Assim definimos os **pólos** de ordem r de R como os zeros de ordem r de Q.

2.6 Limites e continuidade

Como a estrutura topológica de $\mathbb{C}$ coincide com a de $\mathbb{R}^2$ (ver Secção 1.1), as noções de limite e de continuidade de funções também coincidem. Ou seja, $f\colon A \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0 se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que com $z \in A$ e $|z - z_0| < \delta$ temos que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. O que significa que $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$. Segue então que a soma, produto, quociente (excepto onde o denominador é $= 0$) e composição de funções contínuas são funções contínuas. Em particular, os polinómios e as funções racionais são contínuos nos seus domínios ($\mathbb{C}$ no caso dos polinómios e os pontos onde o denominador não se anula no caso das funções racionais).

Observação 7. A função $\arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi, \pi]$ é descontínua nos pontos $\mathbb{R}_0^-$.

2.7 *Esfera de Riemann

Retomamos o estudo da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ iniciado na Secção 1.3.2.

Exercício 15. **Prove que a projecção estereográfica p é contínua.*

Como funções contínuas transformam conjuntos compactos em compactos, e S^2 é compacto em $\mathbb{R}^3$, deduzimos que $\overline{\mathbb{C}}$ é também compacto. Este facto é-nos de grande utilidade porque sabemos que sucessões em conjuntos compactos têem sempre uma subsucessão convergente (podendo ser para $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$).

Exercício 16.

1. **Seja $J\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,*

$$J(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} - \{0\} \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty. \end{cases} \tag{2.10}$$

(a) *Decida se J é contínua em $\overline{\mathbb{C}}$.*
(b) *Diga se J é um homeomorfismo*[5].

2. **Considere a função $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,*

$$f(z) = \begin{cases} P(z), & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde P é um polinómio.

(a) *Mostre que f é contínua em ∞.*
(b) *Mostre que f é um homeomorfismo sse o grau de P é 1.*

3. **Considere a distância ρ em $\overline{\mathbb{C}}$:*

$$\begin{aligned} \rho(z, z') &= \|p^{-1}(z) - p^{-1}(z')\| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $(x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3') \in S^2$, e $z = p(x_1, x_2, x_3)$ e $z' = p(x_1', x_2', x_3')$ estão em $\overline{\mathbb{C}}$. Mostre que:

(a) *$z_n \to z$ em $\mathbb{C}$ sse $\rho(z_n, z) \to 0$*
(b) *$z_n \to \infty$ sse $\rho(z_n, \infty) \to 0$*
(c) *Se $ad - bc \neq 0$, então*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

é contínua em ∞.

3 Diferenciabilidade de funções complexas

3.1 Definição de derivada

Uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ é **diferenciável** em z_0 num aberto $A \subset \mathbb{C}$, se existe em $\mathbb{C}$ a derivada dada por

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{3.1}$$

A função f diz-se **analítica** (ou holomorfa) em A se existe derivada em todos os pontos de A. Ser analítica em z_0 significa que é analítica numa vizinhança de z_0. Uma função diz-se **inteira** se é analítica em $\mathbb{C}$.

Outras notações habitualmente utilizadas para a derivada são:

$$f'(z_0) = Df(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = d_{z_0} f.$$

Exemplo 1. 1. $f(z) = z$ é inteira pois para qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

[5] Um homeomorfismo f é uma função injectiva contínua com inversa também contínua.

2. $f(z) = \overline{z}$ não é diferenciável em qualquer ponto pois escrevendo $z = x+iy$ e $z_0 = x_0+iy_0$ temos limites direccionais diferentes:

$$\lim_{x\to x_0, y=y_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to y_0, x=x_0} \frac{-i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = -1.$$

Proposição 3.1. *Seja $A \subset \mathbb{C}$, aberto. Se f e g são funções analíticas em A, então:*

1. *$af + bg$ é analítica em A com derivada $af' + bg'$, onde $a, b \in \mathbb{C}$.*
2. *fg é analítica em A com derivada $f'g + fg'$.*

Demonstração. Basta usar a definição de derivada. □

Proposição 3.2. *Qualquer polinómio complexo é uma função inteira. Uma função racional é analítica em todos os pontos onde o denominador não se anula (em número finito).*

Demonstração. Usando o resultado anterior, generalizando-o para o quociente entre funções analíticas definidas onde o denominador é diferente de zero, provamos a proposição. □

Teorema 3.3 (Regra da cadeia)**.** *Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ abertos, $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $g\colon B \to \mathbb{C}$ analíticas nos respectivos domínios e tais que $f(A) \subset B$. Então $g \circ f$ é analítica em A com derivada*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)).f'(z), \qquad z \in A. \tag{3.2}$$

Demonstração. Queremos provar que existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g\circ f(z) - g\circ f(z_0)}{z - z_0}$$

sabendo que existem as derivadas

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad e \quad g'(f(z_0)) = \lim_{w\to f(z_0)} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}.$$

Observe que

$$\frac{g\circ f(z) - g\circ f(z_0)}{z-z_0} = \left[h(f(z)) + g'(f(z_0))\right] \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

onde

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)} - g'(f(z_0)), & w \neq f(z_0) \\ 0, & w = f(z_0). \end{cases}$$

Como h e f são contínuas, $\lim_{z\to z_0} h\circ f(z) = 0$. Logo,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g\circ f(z) - g\circ f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \left[h\circ f(z) + g'(f(z_0))\right] \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = g'(f(z_0)).f'(z_0).$$

□

Exercício 17. *Prove que se f é diferenciável em z_0, então é contínua.*

3.2 Equações de Cauchy-Riemann

Observação 8. Recorde que uma função $g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x_0 \in D$ se existir uma transformação linear $Dg(x_0)$ que verifica

$$g(x) = g(x_0) + Dg(x_0)\,(x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \tag{3.3}$$

A derivada de $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$ com $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, é então essa transformação linear dada pela matriz $m \times n$:

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Observação 9. Denotamos o isomorfismo linear entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ por $h\colon z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. Segue que $\|h(z)\| = |z|$ e $|h^{-1}(x,y)| = \|(x,y)\|$. Por outro lado, uma função f em $\mathbb{C}$ tem sempre uma função g correspondente em $\mathbb{R}^2$ dada por $g = h \circ f \circ h^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$. Também temos que a multiplicação de complexos pode ser vista em $\mathbb{R}^2$ por:

$$h(z.z') = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.4. *Seja A um aberto de $\mathbb{C}$ e $f\colon A \to \mathbb{C}$. $f = u + iv$ é diferenciável em $z_0 \in A$ sse $g = h \circ f \circ h^{-1} = (u,v)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) = h(z_0)$ e verificam-se nesse ponto as* **equações de Cauchy-Riemann***:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Comecemos por escrever $h(z) = (x,y)$ e

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| &= |h^{-1}\left(g \circ h(z) - g \circ h(z_0) - h(f'(z_0).(z - z_0))\right)| \\ &= \left\| g(x,y) - g(x_0,y_0) - \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right\|, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde definimos $f'(z_0) = a + ib$. Se f é diferenciável em z_0, o limite da expressão acima quando $z \to z_0$, ou equivalentemente quando $(x,y) \to (x_0,y_0)$, é zero. Ora, isto significa que g é também diferenciável com derivada

$$Dg(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

As equações de Cauchy-Riemann seguem por comparação das entradas das matrizes anteriores. Para obter a fórmula (3.6) basta notar que $f'(z_0) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. □

Exercício 18. *Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

1. *Mostre que não existe limite quando $z \to 0$ de $f(z)/z$.*

2. *Se $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$, prove que $u(x,0) = x$, $v(0,y) = y$, $u(0,y) = v(x,0) = 0$.*

3. *Conclua que as equações de Cauchy-Riemann verificam-se em $(x,y) = (0,0)$, mas $f'(0)$ não existe. Este facto contradiz o teorema?*

4. *Repita a alínea anterior com $f(z) = \sqrt{|xy|}$.*

Teorema 3.5. *Seja A um aberto de $\mathbb{C}$ e $f\colon A \to \mathbb{C}$. Se $g = (u,v)\colon h(A) \to \mathbb{R}^2$ tem derivada contínua e verificam-se as equações de Cauchy-Riemann* (3.5) *em $h(A)$, então f é analítica em A.*

Demonstração. Como u e v são diferenciáveis, usando o teorema do valor médio para $(x,y), (x_0,y_0) \in h(A)$, existe η entre (x,y) e (x_0,y_0) tal que

$$\begin{aligned} u(x,y) - u(x_0,y_0) &= \nabla u(\eta) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ v(x,y) - v(x_0,y_0) &= \nabla v(\eta) \cdot (x - x_0, y - y_0). \end{aligned} \tag{3.8}$$

(Recorde que $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ é o gradiente.) Note que se $(x,y) \to (x_0,y_0)$ então $\eta \to (x_0,y_0)$. Simultaneamente, $\nabla u(\eta) \to \nabla u(x_0,y_0)$ e $\nabla v(\eta) \to \nabla v(x_0,y_0)$ por serem contínuas. Mais, as equações de Cauchy-Riemann implicam que $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial x})$ e $\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x})$. Finalmente, para $z = h^{-1}(x,y)$ e $z_0 = h^{-1}(x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\eta)\alpha - \frac{\partial v}{\partial x}(\eta)\beta + i\frac{\partial v}{\partial x}(\eta')\alpha + i\frac{\partial u}{\partial x}(\eta')\beta}{\alpha + i\beta} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\eta)\alpha^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(\eta')\beta^2 + i\frac{\partial v}{\partial x}(\eta)\alpha^2 + i\frac{\partial v}{\partial x}(\eta')\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $(\alpha,\beta) = (x - x_0, y - y_0)$. Logo, existe para todo $z_0 \in A$,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{3.10}$$

$\square$

Exercício 19. *Para que $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seja analítica, determine a forma da sua parte imaginária quando temos*

1. $\operatorname{Re} f(x,y) = x^2 - xy - y^2$.

2. $\operatorname{Re} f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 20.

1. *Determine o domínio de analiticidade da função racional*

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}.$$

2. *Mostre que as seguintes funções não são analíticas:*

   (a) $f(z) = \operatorname{Re} z$

(b) $f(z) = |z|$

3. *Seja* $A \subset \mathbb{C}$ *aberto e* $\widetilde{A} = \{z \in \mathbb{C}\colon \overline{z} \in A\}$. *Mostre que se* f *é analítica em* A *e* $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, *então* g *é analítica em* $\widetilde{A}$.

4. *Suponha que* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *é analítica numa região* A, *e* $|f|$ *é constante em* A. *Mostre que* f *é constante em* A.

Exercício 21. *Deduza as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares:*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Exercício 22. *Defina os símbolos* ∂ *e* $\overline{\partial}$ *por:*

$$\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \overline{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{3.11}$$

1. *Mostre que as equações de Cauchy-Riemann se reduzem a* $\overline{\partial} f = 0$.

2. *Mostre que se* f *é analítica, então* $f' = \partial f$.

3. *Calcule* $\partial(z)$, $\overline{\partial} z$, $\partial(\overline{z})$ *e* $\overline{\partial}(\overline{z})$.

4. *Mostre que* ∂ *e* $\overline{\partial}$ *obedecem às regras de derivação de somas, produto e multiplicação por escalar.*

Teorema 3.6 (Derivada da função inversa)**.** *Seja* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *analítica e injectiva num aberto* A. *Se* f' *é contínua e* $f'(z) \neq 0$ *para* $z \in A$, *então* f^{-1} *é analítica em* $f(A)$ *e*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in A. \tag{3.12}$$

Demonstração. Seja $g = h \circ f \circ h^{-1} = (u, v)$ de classe C^1. Pelo teorema da função inversa no caso real e usando as equações de Cauchy-Riemann, temos que (para simplificação de notação omitimos o ponto onde a derivada é estudada):

$$Dg^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}$$

verifica as equações de Cauchy-Riemann. Logo $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h$ é analítica. A fórmula (3.12) pode ser obtida pela regra da cadeia (3.2). $\square$

3.3 Derivadas de funções complexas elementares

Proposição 3.7. *A função* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é inteira e* $\exp' = \exp$.

Demonstração. Como $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$, temos que $\overline{\partial}(\mathrm{e}^z) = 0$ e $\partial(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^z$. $\square$

Note que a função log não é contínua no seu domínio, porque arg não é contínua. Porém, se restrigirmos o argumento $\arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi, \pi]$ ao conjunto $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$, obtemos uma função contínua.

Proposição 3.8. *A função* $\log\colon \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ *é analítica e* $(\log z)' = 1/z$.

Demonstração. Em coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $\log z = \log r + i\theta$ para qualquer $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]\pi, \pi[$. Escrevendo $u(r, \theta) = \log r$ e $v(r, \theta) = \theta$ e tendo em conta que estas são funções com derivada contínua no seu domínio, as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial v}{\partial r}$$

garantem a analiticidade de log no seu domínio. Derivando a expressão $z = e^{\log z}$, obtemos $1 = e^{\log z}(\log z)'$. Logo, $(\log z)' = 1/z$. □

Proposição 3.9. *As funções* $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *são inteiras,* $\sin' = \cos$ *e* $\cos' = -\sin$.

Demonstração. Basta usar a definição de seno e cosseno complexos, tendo em conta o facto que a exponencial é inteira. □

Proposição 3.10. *Qualquer polinómio na forma* $P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ *é uma função inteira com* $P'(z) = \sum_{n=0}^{N} n c_n z^{n-1}$.

Exercício 23. *Demonstre a Proposição 3.10.*

Proposição 3.11. *Qualquer função racional* $R = P/Q$ *é analítica em* $\mathbb{C}$ *menos nos seus pólos, com* $R' = (P'Q - Q'P)/Q^2$.

Exercício 24. *Demonstre a Proposição 3.11.*

Exercício 25. *Mostre que se* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *é analítica em* A *e* $f(z) \neq 0$ *para* $z \in A$*, então* $\overline{f}$ *não é analítica. Aproveite para estudar a diferenciabilidade de* $\overline{\exp}$.

Exercício 26. *Mostre que* $\overline{\log}$ *não é analítica.*

3.4 Aplicação a funções reais harmónicas

Seja um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Uma função $u \in C^2(A)$ [6] diz-se **harmónica** se for solução da equação de Laplace:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.13}$$

Ao operador diferencial $\Delta = \nabla^2$ dá-se o nome de Laplaciano.

Proposição 3.12. *Se* $f = u + iv$ *é analítica num aberto* $A \subset \mathbb{C}$*, com* $u, v \in C^2(A)$*, então* u *e* v *são harmónicas em* A.

Demonstração. As equações de Cauchy-Riemann implicam que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Logo, como as derivadas cruzadas de v são iguais,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

O mesmo para v. □

[6] $C^k(A)$ é o espaço das funções $u\colon A \to \mathbb{R}$ de classe C^k, i.e. com derivada contínua de ordem k.

Nas condições acima dizemos que u e v são harmónicas conjugadas.

Proposição 3.13. *Se $f = u + iv$ é analítica num aberto $A \subset \mathbb{C}$, com $u, v \in C^2(A)$, então $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.*

Demonstração. Basta observar que pelas equações de Cauchy-Riemann:

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

onde usamos a notação $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. □

Exercício 27. *Esboce as curvas de nível de u e v para cada uma das funções $f = u + iv$, e verifique que $\nabla u \perp \nabla v$:*

1. $f(z) = z^2$
2. $f(z) = \mathrm{e}^z$
3. $f(z) = \log z$
4. $f(z) = 1/z$

3.5 Transformações conformes

Uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ é **conforme** em $A \subset \mathbb{C}$ se é analítica em A e $f'(z) \neq 0$ para qualquer $z \in A$.

Observação 10.

- Em cada ponto, uma função conforme "roda" e "alonga" da mesma forma vectores tangentes às curvas. De facto, a aplicação linear tangente num ponto $z \in A$, $f'(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, é dada por
$$w \mapsto f'(z).w = r\mathrm{e}^{i\theta} w$$
com $r = |f'(z)|$ e $\theta = \arg f'(z)$. Desde que a derivada não se anule, temos uma rotação por θ e uma contracção/expansão por $r > 0$.
- Uma função conforme preserva ângulos (medidos entre vectores tangentes às curvas).

Exercício 28. *Seja $A = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Mostre que $f\colon A \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, é conforme e injectiva. Determine $f(A)$.*

Proposição 3.14. *O conjunto das funções conformes e bijectivas é um grupo*[7] *(para a operação de composição de funções).*

Demonstração. É claro que a identidade é a função identidade $z \mapsto z$. Basta verificar que a inversa e composição de funções conformes e bijectivas também é conforme e bijectiva. Esse facto segue da derivada das funções inversa e composta. □

[7] A um conjunto G e uma operação $a.b$ entre elementos a e b de G chamamos grupo se: (1) a operação é associativa (2) $a.b \in G$ para quaisquer $a, b \in G$ (3) existe a identidade $e \in G$ tal que $a.e = e.a = a$ (4) para cada $a \in G$ existe o inverso $a^{-1} \in G$ tal que $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$.

3.5.1 Transformações de Möbius

Nesta secção apresentamos um exemplo de funções conformes, as funções racionais na forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{onde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

chamadas de **transformações de Möbius**.

Exercício 29. *Mostre que se $ad - bc = 0$ então a respectiva transformação de Möbius é constante.*

Proposição 3.15. *Qualquer transformação de Möbius é conforme e bijectiva no seu domínio.*

Demonstração. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $c \neq 0$ (o caso $c = 0$ é trivial). No seu domínio $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ a função é analítica. Além disso, $f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz+a}$ é também analítica em $\mathbb{C} - \{-\frac{a}{c}\}$. É simples de verificar que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, e $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$. □

Exercício 30. *Mostre que uma transformação de Möbius f pode ser decomposta na forma $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ onde*

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = (bc - ad)\frac{z}{c^2}, \quad f_4(z) = z + \frac{a}{c}. \tag{3.14}$$

Proposição 3.16. *Uma transformação de Möbius transforma rectas e circunferências em rectas ou circunferências.*

Demonstração. Usando a decomposição (3.14), note que f_1, f_3, f_4 são lineares logo transformam rectas em rectas e circunferências em circunferências. O caso $f_2(z) = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ é mais complicado. Se $z = x + iy$ pertence a uma recta ou circunferência, então verifica uma equação do tipo

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = D \Leftrightarrow A + B\frac{x}{x^2+y^2} + C\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{D}{x^2+y^2},$$

com coeficientes $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Assim, $A + Bu - Cv = D(u^2 + v^2)$, i.e. (u, v) pertence a uma recta ou a uma circunferência. □

4 Caminhos em $\mathbb{C}$

Seja $A \subset \mathbb{C}$ e os números reais $a < b$. Um **caminho** em A é uma função contínua $\gamma \colon [a, b] \to A$. A imagem desse caminho é a **curva** $\Gamma = \gamma([a, b]) \subset A$. Um caminho regular é definido como um caminho γ de classe C^1. Nestas condições, $\gamma'(t)$ é um vector tangente à curva Γ no ponto $\gamma(t)$.

Exemplo 2. O caminho $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$, define a circunferência $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$. Além disso, $\gamma'(t) = 2\pi i\mathrm{e}^{2\pi it}$ é um vector tangente a Γ no ponto $\gamma(t)$.

Um caminho é fechado se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Um caminho fechado $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ diz-se simples se γ for injectiva em $[a, b[$. A um caminho fechado e simples chama-se caminho de Jordan e a curva respectiva é uma curva de Jordan. Um caminho constante corresponde a um ponto (ver Figura 3).

O **comprimento de uma curva** parametrizada por um caminho regular $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ é dado por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

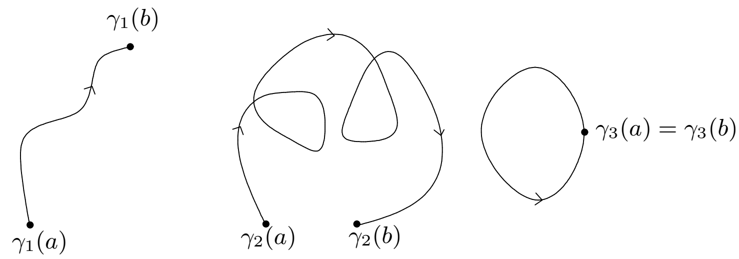

Figura 3: Exemplos de caminhos: γ_1 e γ_3 são simples, γ_3 é fechado.

4.1 Operações entre caminhos

Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho regular. O caminho simétrico é $-\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definido como

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t). \tag{4.1}$$

O caminho simétrico percorre o mesmo percurso de γ, mas no sentido contrário.

Uma reparametrização de um caminho regular $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é um novo caminho regular $\widetilde{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t)), \tag{4.2}$$

onde $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ é um difeomorfismo[8] tal que $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Isto significa apenas que estamos a fazer um rescalamento (não necessariamente linear) do tempo, mantendo o sentido.

Considere dois caminhos regulares $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2\colon [b,c] \to \mathbb{C}$ tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ (i.e. o ponto final de γ_1 é o ponto inicial de γ_2). Podemos assim construir um único caminho (caminho soma) que poderá não ser diferenciável em $t = b$. A soma de γ_1 e γ_2 é o caminho $(\gamma_1 + \gamma_2)\colon [a,c] \to \mathbb{C}$ tal que

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c]. \end{cases} \tag{4.3}$$

O caminho soma será regular por troços, onde os troços correspondem aos caminhos regulares originais.

4.2 Homotopias

Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto. Uma **homotopia** entre caminhos $\gamma_0\colon [0,1] \to A$ e $\gamma_1\colon [0,1] \to A$

1. com mesmos pontos final e inicial ($\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ e $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$) é uma função contínua $H\colon [0,1] \times [0,1] \to A$ tal que, para $t, s \in [0,1]$:

   (a) $H(0,t) = \gamma_0(t)$

   (b) $H(1,t) = \gamma_1(t)$

   (c) $H(s,0) = \gamma_0(0)$

   (d) $H(s,1) = \gamma_0(1)$

[8] Um difeomorfismo é uma função C^1 bijectiva com inversa também C^1.

2. fechados ($\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ e $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$) é uma função contínua $H\colon [0,1] \times [0,1] \to A$ tal que, para $t, s \in [0,1]$:

   (a) $H(0,t) = \gamma_0(t)$

   (b) $H(1,t) = \gamma_1(t)$

   (c) $H(s,0) = H(s,1)$

Um caminho fechado γ diz-se homotópico a um ponto z_0 se existir uma homotopia entre γ e o caminho constante $t \mapsto z_0$.

Exemplo 3.

1. Conside os caminhos com pontos inicial e final comuns:

$$\gamma_0(t) = t(1+i), \quad \gamma_1(t) = t + t^2 i.$$

   Uma possível homotopia é a função $H(s,t) = t + t^{1+s} i$. Outro exemplo é $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$.

2. Considere os caminhos fechados:

$$\gamma_0(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}, \quad \gamma_1(t) = 2\mathrm{e}^{2\pi i t}.$$

   Um exemplo de homotopia é $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$.

Podemos usar a definição de homotopia para obter um conceito topológico. Um conjunto conexo $A \subset \mathbb{C}$ é **simplesmente conexo** se qualquer caminho fechado em A é homotópico a um ponto (caminho constante). Isto significa que o conjunto A não contém "buracos".

5 Integração em $\mathbb{C}$

O integral de uma função complexa h definida num intervalo real, i.e. $h\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ onde $[a,b] \subset \mathbb{R}$, é tomado como

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} h(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} h(t)dt. \tag{5.1}$$

De seguida tratamos o caso de uma função complexa definida num subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.

5.1 Integral de caminho

Sejam um aberto $A \subset \mathbb{C}$, uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ contínua e um caminho regular $\gamma\colon [a,b] \to A$. Definimos o integral de f ao longo de γ (integral de caminho ou integral de linha) como

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{5.2}$$

Exercício 31. *Calcule os integrais:*

1. $\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz$ *para o caminho* $\gamma(t) = t + it$ *com* $t \in [0,1]$. *(Note que a função* f *assume valores reais, porém o valor do integral não é real.)*

2. $\int_\gamma z^3\, dz$ *para* γ *o caminho (com sentido anti-horário) sobre a elipse* $x^2 + 4y^2 = 1$ *entre* 1 *e* $i/2$.

3. $\int_\gamma \exp z\, dz$ *sendo* γ *o caminho que descreve:*

   (a) *o segmento de recta de* 1 *a* i.

   (b) *o arco de circunferência centrada na origem (com sentido anti-horário) e raio 1 entre* 1 *e* i.

5.2 Propriedades do integral

Proposição 5.1. *Sejam* f *e* g *funções contínuas num aberto* $A \subset \mathbb{C}$, γ, γ_1 *e* γ_2 *caminhos regulares em* A *tais que o ponto final de* γ_1 *coincide com o ponto inicial de* γ_2, *e* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. *Então:*

- $\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$
- $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$
- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$
- $\int_{\widetilde{\gamma}} f = \int_\gamma f$ *onde* $\widetilde{\gamma}$ *é uma reparametrização de* γ.

Exercício 32. *Demonstre a Proposição* 5.1.

Observação 11. Fazendo uso da Proposição 5.1, podemos definir o integral de caminhos regulares por troços, uma vez que estes caminhos são somas de caminhos regulares. O integral sobre um caminho regular por troços será então a soma dos integrais dos correspondentes caminhos regulares.

Exercício 33. *Calcule os seguintes integrais para o caminho* γ *(com sentido anti-horário) que circunda o quadrado com vértices nos pontos* 0, 1, i *e* $1 + i$*:*

1. $\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz$
2. $\int_\gamma (z^2 + 1)\, dz$
3. $\int_\gamma \overline{z}\, dz$

A proposição seguinte permite-nos estimar integrais de difícil computação.

Proposição 5.2. *Sejam* $A \subset \mathbb{C}$ *aberto,* $f \colon A \to \mathbb{C}$ *contínua e* $\gamma \colon [a, b] \to A$ *um caminho regular. Então*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)| dt \leq \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|\, \ell(\gamma), \tag{5.3}$$

onde $\ell(\gamma)$ *é o comprimento da curva* $\Gamma = \gamma([a, b])$.

Exercício 34. *Demonstre a Proposição* 5.2.

5.3 Teorema fundamental do cálculo

Uma primitiva de uma função complexa é definida de forma idêntica ao caso real. Ou seja, uma primitiva F de uma função complexa f é analítica e satisfaz $F' = f$. As primitivas de f diferem apenas de constantes, pois se F_1 e F_2 são ambas primitivas de f, então $G = F_1 - F_2$ tem derivada nula logo é uma constante.

Teorema 5.3 (Teorema fundamental do cálculo)**.** *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto, um caminho regular $\gamma\colon [a,b] \to A$ e uma função contínua $f\colon A \to \mathbb{C}$ com primitiva F em A. Então,*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{5.4}$$

Observação 12.

- Se o caminho for fechado, i.e. $\gamma(b) = \gamma(a)$, $\int_\gamma f = 0$.
- Se o caminho for regular por troços, aplicando-se o teorema a cada troço e somando os respectivos integrais, podemos generalizar o resultado acima.
- Note que o integral ao longo de γ apenas depende dos seus pontos inicial e final. Logo, será o mesmo para outros caminhos com os mesmos extremos.

Demonstração. Escrevendo $F(\gamma(t)) = u(t) + iv(t)$, temos que $f(\gamma(t))\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = u'(t) + iv'(t)$. Assim, pela definição de integral de caminho:

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [u'(t) + iv'(t)]dt$$

Pelo teorema fundamental do cálculo integral em $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b [u'(t) + iv'(t)]dt = u(b) - u(a) + i[v(b) - v(a)] = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

$\square$

Exercício 35. *Encontre dois caminhos regulares γ_1 e γ_2 com pontos inicial e final iguais, tais que*

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}dz \neq \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}dz.$$

Explique porque isto é possível e não viola o teorema fundamental do cálculo.

Teorema 5.4. *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ contínua numa região $A \subset \mathbb{C}$. Então, f tem uma primitiva em A sse $\int_\gamma f = 0$ para qualquer caminho fechado regular por troços $\gamma\colon [a,b] \to A$.*

Observação 13. $\int_\gamma f = 0$ para qualquer caminho fechado γ sse o integral entre dois pontos de A é independente do caminho. De facto, se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ onde γ_1 e γ_2 têm por extremos esses dois pontos, então $\int_{\gamma_1} f = \int_{-\gamma_2} f$, ou seja o valor do integral apenas depende dos extremos. A implicação inversa é óbvia.

Demonstração.

- $(\Rightarrow)$ Se f tem uma primitiva F, então pelo teorema fundamental do cálculo $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.

- ($\Leftarrow$) Assuma agora que para qualquer caminho fechado γ o integral de f anula-se. Fixe um ponto w em A e considere um caminho com extremos w e $z_0 \in A$ a que chamamos ρ_{z_0}. Considere então a função $F(z_0) = \int_{\rho_{z_0}} f$, bem definida pois o valor do integral apenas depende dos pontos extremos do caminho e não do caminho em si (recorde que w é fixo pelo que não consideramos a função dependente deste ponto). Queremos verificar que F é a primitiva de f, bastando para isso provar que é diferenciável e que $F' = f$.

  Como A é uma região, em redor de z_0 podemos inscrever um disco $D_r(z_0)$ com raio r (suficientemente pequeno). Para $z \in D_r(z_0)$ definimos o caminho $\eta_z(t) = z_0 + t(z - z_0)$, $t \in [0,1]$, que une z_0 a z por um segmento de recta denominado Γ_z. Logo, $\int_{\eta_z} dz = z - z_0$ e $\ell(\eta_z) = |z - z_0|$.

  Finalmente, como $F(z) - F(z_0) = \int_{\eta_z} f$, usando a Proposição 5.2:

  $$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| = \frac{\left|\int_{\eta_z}[f(\xi) - f(z_0)]d\xi\right|}{|z - z_0|} \leq \sup_{\xi \in \Gamma_z} |f(\xi) - f(z_0)|,$$

  e pela continuidade de f, $\lim_{z \to z_0} \sup_{\xi \in \Gamma_z} |f(\xi) - f(z_0)| = 0$ e

  $$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = 0.$$

  Concluímos que F é diferenciável em qualquer ponto $z_0 \in A$ e $F' = f$.

$\square$

Exercício 36. *Calcule:*

1. $\int_{|z|=1} (\overline{z})^{-1} dz$ *e mostre que* $z \mapsto (\overline{z})^{-1}$ *não é primitivável.*
2. $\int_\gamma (z - w)^n dz$ *onde* $n \in \mathbb{Z}$ *e* γ *determina a circunferência de raio* r *centrada em* $w \in \mathbb{C}$.

Exercício 37. *Mostre que para qualquer caminho fechado regular por troços* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *com* $w \notin \gamma([a,b])$ *temos que*

$$\operatorname{rot}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - w} \in \mathbb{Z}. \tag{5.5}$$

Note que o número acima $\operatorname{rot}(\gamma, w)$ *(chamado número de rotação de* γ *em torno de* w*) indica o número de "voltas" dadas pelo caminho em redor do ponto* w.

Sugestão*: Considere a função*

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds, \quad t \in [a,b].$$

Queremos então provar que $h(b) \in \mathbb{Z}$. *Para isso verifique que* $[\gamma(t) - w]\mathrm{e}^{-2\pi i h(t)}$ *é constante.*

Exercício 38. *Descreva condições sobre* γ *para que* $\int_\gamma \log z \, dz = 0$.

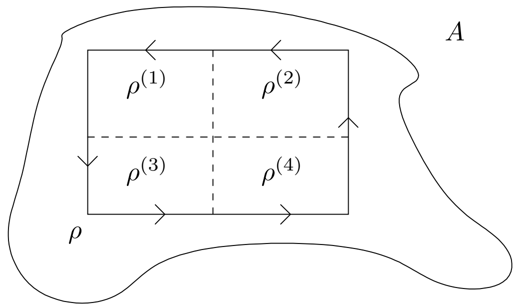

Figura 4:

5.4 Teorema de Cauchy

Nesta altura é importante realçar o facto da primitivação de funções complexas ser um problema mais subtil que a primitivação de funções reais. Tal reflecte a restrição imposta pelas equações de Cauchy-Riemann. Para as funções reais terem primitiva é suficiente que sejam contínuas. Pretendemos agora obter também uma condição suficiente de simples verificação para funções complexas. Na próxima secção iremos provar que de facto é uma condição necessária e suficiente.

Nesta secção iremos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.5 (Cauchy)**.** *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica numa região $A \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexa e um caminho fechado γ em A regular por troços. Então,*

$$\int_\gamma f = 0. \tag{5.6}$$

Observação 14. Usando o Teorema 5.4, se f é analítica numa região A simplesmente conexa, então é primitivável em A.

Começamos com versões do Teorema de Cauchy em regiões especiais.

Teorema 5.6 (num rectângulo)**.** *Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica e $\rho\colon [a,b] \to A$ um caminho rectangular com lados paralelos aos eixos. Então, $\int_\rho f = 0$.*

Demonstração.

- Dividimos o rectângulo circundado por ρ em 4 novos rectângulos iguais como indica a Fig. 4. Definimos então os caminhos rectangulares $\rho^{(i)}$, $1 \le i \le 4$, com sentido anti-horário. Desta forma $\int_\rho f = \sum_{i=1}^4 \int_{\rho^{(i)}} f$. Logo,

  $$\left|\int_\rho f\right| \le 4 \left|\int_{\rho_1} f\right|$$

  onde ρ_1 é o caminho entre os $\rho^{(i)}$ que maximiza $\left|\int_{\rho^{(i)}} f\right|$.

  Por outro lado, se o perímetro e o diâmetro de ρ (i.e. do rectângulo circunscrito por ρ) são dados por, respectivamente, P e Δ, então, para ρ_1, temos que $P_1 = P/2$ e $\Delta_1 = \Delta/2$.

- Podemos repetir este procedimento n vezes até obtermos

$$\left|\int_\rho f\right| \leq 4^n \left|\int_{\rho_n} f\right|, \quad P_n = \frac{P}{2^n}, \quad \Delta_n = \frac{\Delta}{2^n}.$$

- Escolhemos o ponto z_0 que se encontra no interior de todos os rectângulos definidos por ρ_n (como $\lim P_n = \lim \Delta_n = 0$ é simples verificar que z_0 é único). A função f é, por hipótese, analítica em z_0. Isto implica que para qualquer $\varepsilon > 0$ encontramos $\delta > 0$ tal que para $z \in D_\delta(z_0)$ verifica-se

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

- Finalmente, notando que $\int_{\rho_n} dz = \int_{\rho_n}(z - z_0)dz = 0$ pois 1 e z são primitiváveis,

$$\begin{aligned}\left|\int_\rho f\right| &\leq 4^n \left|\int_{\rho_n} f\right| = 4^n \left|\int_{\rho_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz\right| \\ &\leq 4^n \varepsilon \int_{\rho_n} |z - z_0|\,|dz| \leq 4^n \varepsilon \Delta_n P_n = \varepsilon \Delta P.\end{aligned}$$

  Como a desigualdade anterior é válida para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $\int_\rho f = 0$.

□

Teorema 5.7 (num disco)**.** *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f\colon D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ analítica, e um caminho fechado $\gamma\colon [a,b] \to D_r(z_0)$ regular por troços. Então,*

$$\int_\gamma f = 0. \tag{5.7}$$

Demonstração. Vamos mostrar que se f é analítica num disco, então tem primitiva. Usando o Teorema 5.4 podemos então deduzir (5.7).

Seja

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f, \quad z \in D_r(z_0),$$

onde $[z_0, z]$ denota a soma do caminho horizontal desde z_0 até $z_0 + \operatorname{Re}(z - z_0)$ com o caminho vertical desde $z_0 + \operatorname{Re}(z - z_0)$ até z. Sendo assim, para $w \in D_r(z_0)$,

$$F(w) - F(z) = \pm \int_\rho f + \int_{[z,w]} f, \tag{5.8}$$

com ρ o caminho rectangular com vértices em z e $z_0 + \operatorname{Re}(w - z_0)$. Como, pelo Teorema 5.6, temos que $\int_\rho f = 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| &= \frac{1}{|w - z|}\left|\int_{[z,w]} f - f(z)(w - z)\right| \\ &= \frac{1}{|w - z|}\left|\int_{[z,w]} [f(\xi) - f(z)]d\xi\right| \\ &\leq \frac{\sup_{\xi\in[z,w]}|f(\xi) - f(z)|}{|w - z|}\ell([z,w]) \\ &\leq 2 \sup_{\xi\in[z,w]} |f(\xi) - f(z)|.\end{aligned}$$

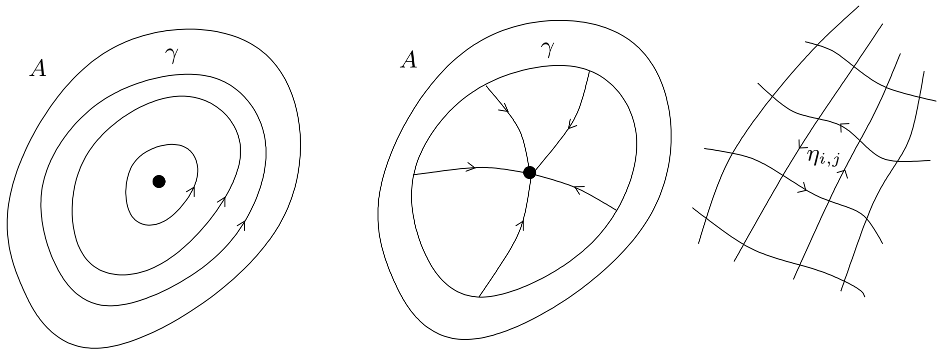

Figura 5: As curvas $H(s_i, \cdot)$, $H(\cdot, t_j)$ e $\eta_{i,j}$.

Como f é contínua, $\lim_{w\to z} \sup_{\xi\in[z,w]} |f(\xi) - f(z)| = 0$ e

$$\lim_{w\to z} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| = 0,$$

i.e. $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D_r(z_0)$. $\square$

Exercício 39. *Prove* (5.8).

Demonstração do Teorema de Cauchy.

- Considere a homotopia $H\colon [0,1] \times [0,1] \to A$ entre $\gamma\colon [0,1] \to A$ e um ponto, e os números $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ e $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ que definem partições de $[0,1]$. O quadrado $[0,1] \times [0,1]$ pode ser decomposto em n^2 subquadrados na forma $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$, com $i, j = 0, \dots, n-1$. Note que para cada par (i, j) temos um ponto $H(s_i, t_i)$ em A.
- Se n for tomado suficientemente grande cada conjunto $H([s_i, s_{i+1}]\times[t_j, t_{j+1}])$ está contido num mesmo disco em A (ver Fig. 5). Isto é de facto possível pois H é contínua num conjunto compacto, logo uniformemente contínua. Além disso, podemos aproximar os caminhos contínuos $s \mapsto H(s, t_j)$, $s \in [s_i, s_{i+1}]$, e $t \mapsto H(s_i, t)$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, por caminhos em A regulares por troços. Sejam $\eta_{i,j}$ esses caminhos regulares por troços e fixamos $\eta_{0,j} = \gamma$ em $[t_j, t_{j+1}]$. Então,
$$\int_\gamma f = \sum_{i,j=0}^{n-1} \int_{\eta_{i,j}} f. \tag{5.9}$$
- Como $\eta_{i,j}$ é um caminho dentro de um disco onde f é analítica, para provar (5.6) usamos o Teorema 5.7 que garante que $\int_{\eta_{i,j}} f = 0$.

$\square$

Exercício 40. *Prove* (5.9).

5.5 Aplicações do Teorema de Cauchy

Teorema 5.8 (Fórmula de Cauchy)**.** *Seja $A \subset \mathbb{C}$ uma região simplesmente conexa e $f : A \to \mathbb{C}$ analítica. Então:*

1. *Todas as derivadas de f existem em A.*
2. *Para qualquer caminho fechado $\gamma : [a, b] \to A$ regular por troços, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $z \in A - \gamma([a, b])$, temos que*

$$f^{(k)}(z).\operatorname{rot}(\gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{5.10}$$

Observação 15.

- Note que $0! = 1$ por convenção, e que $f^{(0)} = f$.
- Se γ é um caminho de Jordan (fechado e simples) e z encontra-se no interior da curva ($\operatorname{rot}(\gamma, z) = 1$), então a fórmula de Cauchy reduz-se a

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{5.11}$$

- Aprecie o resultado acima, nomeadamente o facto dos valores da função f e das suas derivadas poderem ser determinados através apenas dos valores de f sobre uma curva.

Para provar o resultado acima necessitamos da seguinte variante dos Teoremas 5.6 e 5.7.

Teorema 5.9. *Os teoremas e* 5.5, 5.6 *e* 5.7 *são válidos mesmo se f for analítica no seu domínio com excepção de um ponto z_0 onde é apenas contínua.*

Exercício 41. **Demonstre o Teorema* 5.9*.*

Demonstração do Teorema 5.8*.* Considere a função

$$F(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z, \end{cases}$$

analítica para $\xi \neq z$ e contínua para todo $\xi \in A$. Podemos então usar o Teorema 5.9 para deduzir que

$$0 = \int_\gamma F = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi,$$

quando z não está na curva dada por γ. Pela definição de $\operatorname{rot}(\gamma, z)$ dada em (5.5), provámos (5.10) para $k = 0$. Mais, f é analítica por hipótese.

O seguinte lema será suficiente para provar a existência de todas as derivadas e as restantes igualdades (5.10) para $k \in \mathbb{N}$.

Lema 5.10. *Se φ é uma função contínua em $\Gamma = \gamma([a, b])$, então*

$$F_n(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi, \quad z \in A - \Gamma,$$

é analítica com derivada $F_n' = nF_{n+1}$.

Demonstração.

- Seja $z_0 \notin \Gamma$ e $\delta > 0$ tal que $D_\delta(z_0) \cap \Gamma = \emptyset$. Se $z \in D_{\delta/2}(z_0)$, temos que $|\xi - z| > \delta/2$ para todos os pontos ξ na curva Γ. Logo,
$$F_1(z) - F_1(z_0) = (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi \tag{5.12}$$
e
$$|F_1(z) - F_1(z_0)| < \frac{2|z - z_0|}{\delta^2} \sup_{\xi \in \Gamma} |\varphi(\xi)| \, \ell(\gamma).$$
Tirando o limite quando $z \to z_0$ temos que F_1 é contínua em z_0.

- Podemos repetir o procedimento anterior para a função $\widetilde{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi)/(\xi - z_0)$ em vez de φ, o que implica que a função
$$G_1(z) = \int_\gamma \frac{\widetilde{\varphi}(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi$$
é contínua em z_0. Ou seja, por (5.12),
$$\lim_{z \to z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} G_1(z) = F_2(z_0).$$
Assim, $F_1' = F_2$. O mesmo para G_1 usando a função $\widetilde{\varphi}$, i.e. $G_1' = G_2$.

- Iremos provar por indução as restantes igualdades para $n > 1$ e a existência de todas as derivadas. Assim, assumimos que F_{n-1} e
$$G_{n-1}(z) = \int_\gamma \frac{\widetilde{\varphi}(\xi)}{(\xi - z)^{n-1}} d\xi = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} d\xi$$
são contínuas em z_0, e que $F_{n-1}' = (n-1)F_n$ e $G_{n-1}' = (n-1)G_n$. Note que $G_{n-1}(z_0) = F_n(z_0)$ e
$$\frac{1}{(\xi - z)^n} = \frac{\xi - z + z - z_0}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} + \frac{z - z_0}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)}.$$

- Então,
$$\begin{aligned} F_n(z) - F_n(z_0) &= \int_\gamma \left[\frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^n} + \frac{z - z_0}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} \right] \varphi(\xi) d\xi \\ &= G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0) + (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} d\xi. \end{aligned}$$
Como G_{n-1} é contínua em z_0 e pelo mesmo argumento de (5.12), o limite da expressão acima quando $z \to z_0$ é zero. Simultaneamente,
$$\frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} = \frac{G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)}{z - z_0} + \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} d\xi$$
e
$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} &= (n-1)G_n(z_0) + \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= (n-1)F_{n+1}(z_0) + F_{n+1}(z_0) \\ &= nF_{n+1}(z_0). \end{aligned}$$
I.e. $F_n' = nF_{n+1}$. O mesmo para $G_n' = nG_{n+1}$.

□

Exercício 42. *Termine a demonstração do Teorema* 5.8.

□

Exercício 43. *Mostre que se f é analítica em $\overline{D}_r(z_0)$, então $f(z_0)$ é igual à média de f na circunferência $\partial D_r(z_0)$. I.e.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{it}) dt. \tag{5.13}$$

Exercício 44. *Por comparação com a fórmula de Cauchy, calcule*

1. $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz$
2. $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz$
3. $\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^n} dz$

Teorema 5.11 (Princípio do módulo máximo)**.** *Seja uma região $A \subset \mathbb{C}$ limitada e $f\colon \overline{A} \to \mathbb{C}$ analítica em A e contínua em $\overline{A}$. Então, $|f|$ tem máximo num ponto da fronteira de A ou é constante.*

Demonstração. Como f é contínua em $\overline{A}$ (limitado e fechado = compacto), então existe máximo em $\overline{A}$. Seja $a \in \overline{A}$ um maximizante. Se a pertence à fronteira, o teorema está demonstrado. Resta considerar o caso $a \in A$.

Comecemos por uma versão local. Seja z_0 um maximizante local. I.e. $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para $z \in D_R(z_0)$ para $R > 0$ suficientemente pequeno. Queremos mostrar que f é constante[9] nesse disco. Supondo (por absurdo) que existe $z_1 = z_0 + re^{i\theta} \in D_R(z_0)$, $r < R$, tal que $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Como f é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z_0 + re^{i(\theta+t)})| < \frac{|f(z_0)|+|f(z_1)|}{2}$ para cada $0 < t < \varepsilon$. Assim, usando (5.13) e o facto de $|f(z_0)|$ ser um máximo local,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{2\pi} f(z_0 + re^{i(\theta+t)})\, dt \right| \\ &< \frac{1}{2\pi} \left[\varepsilon \frac{|f(z_0)| + |f(z_1)|}{2} + (2\pi - \varepsilon)|f(z_0)| \right] \\ &= |f(z_0)| - \frac{\varepsilon}{4\pi}(|f(z_0)| - |f(z_1)|) < |f(z_0)|, \end{aligned}$$

chegamos a uma contradição.

Considere o conjunto $A_1 = \{z \in A\colon f(z) = f(a)\}$ dos maximizantes de $|f|$. Este conjunto é não vazio porque $a \in A_1$. Além disso é aberto pois (como vimos acima) para qualquer $z \in A_1$ existe $R > 0$ tal que f é constante em $D_R(z_0)$.

Seja $A_2 = A \cap (\mathbb{C} - \overline{A}_1)$ que é aberto pois é a intersecção de abertos. Todos os pontos de A ou estão em A_1 ou em A_2, pois como f é contínua, qualquer sucessão convergente $z_n \in A_1$ (i.e. $f(z_n) = f(a)$) tem por limite $z \in \overline{A}_1$ verificando $f(z) = f(a)$ (note que z não tem que pertencer a A). Logo $z \in \overline{A}_1$, i.e. $z_1 \notin A_2$.

Como $A = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A só pode ser conexo se um desses conjuntos for vazio. Assim, $A = A_1$ e f é constante. □

[9] Anteriormente já provámos que uma função analítica é constante sse o seu módulo é constante.

Teorema 5.12 (Estimativas de Cauchy)**.** *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica numa região $A \subset \mathbb{C}$ e γ o caminho em redor de $D_r(z_0) \subset A$. Então, para $k \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{z\in\gamma} |f(z)|. \tag{5.14}$$

Exercício 45.

1. *Prove o Teorema* 5.12*.*
2. *Mostre usando o Teorema* 5.12 *que uma função analítica e limitada em $\mathbb{C}$ só pode ser constante.*
3. *Mostre que um polinómio $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de grau ≥ 1 tem pelo menos um zero (teorema fundamental da álgebra).* Sugestão*: Prove por absurdo que se não tem zeros, então $1/P(z)$ seria analítica e limitada.*

Teorema 5.13. *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ definida numa região $A \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexa. Então, as proposições seguintes são equivalentes:*

1. *f é analítica em A.*
2. *f é primitivável em A.*
3. *$\int_\gamma f = 0$ para qualquer caminho γ fechado regular por troços em A.*
4. *f tem todas as derivadas em A.*

Demonstração. A equivalência entre 2 e 3 é dada pelo Teorema 5.4. O Teorema de Cauchy garante que 1 implica 2. Finalmente, pelo Teorema 5.8, a primitiva F (que é analítica com $F' = f$) é infinitamente diferenciável. Assim 4 é válida, em particular $f' = F''$ existe em A. □

6 Séries de potências de funções analíticas

6.1 Revisão “relâmpago” sobre convergência de séries

Uma sucessão z_n em $\mathbb{C}$ **converge** para $z \in \mathbb{C}$, i.e. $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$ ou $z_n \to z$, se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar uma ordem $N \in \mathbb{N}$ a partir da qual ($n > N$) temos $|z_n - z| < \varepsilon$.

A série $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ (ou simplesmente $\sum c_k$), com $c_k \in \mathbb{C}$, converge se a sucessão das somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

converge. Nesse caso,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

De particular utilidade é o conceito de convergência absoluta, pois reduzimos o problema ao estudo de séries positivas em $\mathbb{R}$ para as quais existem vários critérios de convergência. Uma série $\sum c_k$ diz-se **absolutamente convergente** se $\sum |c_k|$ converge. Pela definição é simples verificar que se a série converge absolutamente terá que convergir (o contrário não é verdade, e.g. $\sum (-1)^k/k$).

Considere agora uma sucessão de funções $f_n\colon A \to \mathbb{C}$ onde $A \subset \mathbb{C}$. Temos então duas formas de convergência:

1. f_n **converge pontualmente** para f se $|f_n(z) - f(z)| \to 0$ para cada $z \in A$;

2. f_n **converge uniformemente**[10] para $f: A \to \mathbb{C}$ se $\|f_n - f\|_A \to 0$.

A convergência uniforme de funções contínuas implica que o limite também é uma função contínua.

Proposição 6.1. *Se $f_n: A \to \mathbb{C}$ é uma sucessão de funções contínuas e $\|f_n - f\|_A \to 0$ para alguma $f: A \to \mathbb{C}$, então f é contínua.*

Demonstração. Fixe $z_0 \in A$. Comecemos por notar que para $z, z_0 \in A$,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|.$$

Como $\|f_n - f\|_A \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$ e $|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3$. Como f_n é contínua existe $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$ temos $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3$.

Concluindo, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$ então

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

I.e. f é contínua em qualquer $z_0 \in A$. $\square$

Podemos então definir séries de funções $\sum f_k$. A convergência é dada por:

1. $\sum f_k$ converge pontualmente se $\sum_{k=1}^n f_k$ converge pontualmente;

2. $\sum f_k$ converge uniformemente se $\sum_{k=1}^n f_k$ converge uniformemente.

Observação 16.

- De particular utilidade é o seguinte teste (de fácil demonstração): Se $\sum \|f_k\|_A$ converge, então $\sum f_k$ converge absoluta e uniformemente em A.

- De modo semelhante à Proposição 6.1 podemos demonstrar que se f_n são funções contínuas e $\sum f_k$ converge uniformemente em A, então $\sum f_k$ é contínua em A.

Exercício 46. *Determine a convergência de $\sum z^k/k$ em $D_r(0)$.*

Exercício 47. *Mostre que $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge em $D_1(0)$ para a função $f(z) = 1/(1-z)$. Prove que a convergência é uniforme e absoluta em qualquer conjunto $\overline{D_r(0)}$ com $r < 1$.*

6.2 Convergência de sucessões e séries de funções analíticas

Teorema 6.2. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto e uma sucessão de funções $f_n: A \to \mathbb{C}$ analíticas.*

1. *Se $\|f_n - f\|_D \to 0$ em qualquer disco fechado D em A, então f é analítica e $f_n' \to f'$ pontualmente em A e uniformemente em D.*

2. *Se $\sum f_k$ converge uniformemente em qualquer disco fechado em A, então $\sum f_k$ é analítica e $(\sum f_k)' = \sum f_k'$ pontualmente em A e uniformemente em qualquer disco fechado em A.*

[10] A norma uniforme definida para funções f é $\|f\|_A = \sup_{z\in A} |f(z)|$.

Lema 6.3. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ uma região, um caminho $\gamma\colon [a,b] \to A$ regular por troços e uma sucessão de funções $f_n\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ contínuas tal que $\|f_n - f\|_{\gamma([a,b])} \to 0$. Então,*

$$\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f.$$

Além disso, se $\sum f_k$ converge uniformemente em γ, então

$$\int_\gamma \sum f_k = \sum \int_\gamma f_k.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ temos que $\|f_n - f\|_\gamma < \varepsilon$. Logo,

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)\right| \leq \|f_n - f\|_\gamma\, \ell(\gamma) < \varepsilon\, \ell(\gamma).$$

I.e. $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$.

A mesma ideia para a série. □

Demonstração do Teorema 6.2. Como $f_n \to f$ uniformemente e f_n é analítica em D, para qualquer caminho fechado γ em D regular por troços temos que $\int_\gamma f_n = 0$ pelo teorema de Cauchy e que $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma g$ pelo lema acima. Ou seja, $\int_\gamma f = 0$. Pelo Teorema 5.13, f é analítica em D.

Consideremos agora que D é um disco de raio r e que γ determina uma circunferência concêntrica de raio $\rho > r$ de tal forma que γ ainda está em A. Assim, pela fórmula de Cauchy,

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Como $|\xi - z| \geq \rho - r$ para $\xi \in \gamma([a,b])$ e $z \in D$,

$$\|f_n' - f'\|_D \leq \frac{\|f_n - f\|_\gamma\, \ell(\gamma)}{2\pi(\rho - r)^2} = \frac{\|f_n - f\|_\gamma\, \rho}{(\rho - r)^2}.$$

Do facto $\|f_n - f\|_\gamma \to 0$ provamos que $f_n' \to f'$ uniformemente em D.

A mesma ideia para a série. □

Exercício 48. *Considere a função zeta (ζ) de Riemann*[11]

$$\zeta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-z}$$

1. *Mostre que ζ é analítica em $A = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 1\}$.*
2. *Escreva ζ' sob a forma de uma série.*

[11] Riemann (1826 - 1866) observou que a frequência dos números primos entre os naturais é muito parecida com o comportamento da função ζ. A famosa “Hipótese de Riemann” conjectura que todas as soluções de $\zeta(z) = 0$ encontram-se na recta vertical $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\}$. Isto foi verificado para as primeiras 1,500,000,000 soluções. Porém, uma demonstração formal para qualquer caso não é conhecida. No caso de ter alguma boa ideia, gostará de saber que há um prémio de 1 milhão de dólares para quem resolver este problema. Veja em: http://www.claymath.org/millennium/

6.3 Convergência da série de Taylor

A série de Taylor de uma função infinitamente diferenciável $f\colon A \to \mathbb{C}$ em redor de $z_0 \in A$ é dada pela série de potências

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

Um problema óbvio é saber onde esta série é igual à função, i.e. quando a série acima converge.

Teorema 6.4 (Taylor)**.** *Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica e $D_r(z_0) \subset A$. Então,*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \textit{(série de Taylor)} \tag{6.1}$$

para todo $z \in D_r(z_0)$.

Demonstração. Seja γ o caminho que descreve uma circunferência de raio $\sigma < r$ e centrada em z_0. Assim, para $z \in D_\sigma(z_0)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Como podemos escrever

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n,$$

obtemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$

Ou seja, usando o Lema 6.3,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

□

Exercício 49. *Determine a série de Taylor da função ζ de Riemann em redor de $z_0 = 2$.*

Corolário 6.5. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ uma região. Uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ é analítica sse para cada $z_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset A$ e f igual à sua série de Taylor em $D_r(z_0)$.*

Observação 17. Poderíamos ter definido inicialmente funções analíticas desta maneira. De facto, em $\mathbb{R}$, esta é a definição.

Demonstração.

- ($\Rightarrow$) Segue do teorema de Taylor.
- ($\Leftarrow$) A série de Taylor é analítica em $D_r(z_0)$ pois converge. Como é válido para qualquer $z_0 \in A$, temos que f é analítica em A.

□

6.4 Continuação analítica

O facto de uma função analítica ser igual à sua série de Taylor tem várias consequências importantes. Em particular, se a função se anula em pontos que "acumulam" no domínio, então terá que se anular em todo o domínio (desde que este seja conexo).

Teorema 6.6. *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica numa região $A \subset \mathbb{C}$. Se existe uma sucessão $z_n \in A$ convergente para $z_0 \in A$ tal que $z_n \neq z_m$, $n \neq m$, e $f(z_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, então $f(z) = 0$, $z \in A$.*

Demonstração. Como f é analítica, podemos escrever para cada $z_0 \in A$ a série de Taylor definida num disco $D_r(z_0) \subset A$. Se $f^{(k)}(z_0) = 0$ para qualquer $k \geq 0$, então o teorema está demonstrado. Assumimos então que existe p tal que $f^{(p)}(z_0) \neq 0$ e $f^{(k)}(z_0) = 0$ para $k < p$. Assim,

$$f(z) = (z - z_0)^p \varphi(z) \quad \text{onde} \quad \varphi(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k+p)}(z_0)}{(k+p)!}(z - z_0)^k.$$

A função φ é também analítica pois corresponde a uma série de Taylor convergente. Em particular, $\varphi(z_0) = f^{(p)}(z_0)/p! \neq 0$. Como φ é contínua, existe uma vizinhança $D_R(z_0)$ de z_0 com $0 < R < r$, tal que $\varphi(z) \neq 0$ se $z \in D_R(z_0)$.

Vamos então provar por absurdo que $f(z) \neq 0$ em $D_R(z_0)$. I.e. assumimos que existe $z^* \in D_R(z_0)$ tal que $f(z^*) \neq 0$. Porém, $f(z^*) = (z^* - z_0)^p \varphi(z^*) = 0$, logo $z^* = z_0$. Ou seja, não existe uma sucessão nas condições do enunciado.

Como o teorema é válido para $D_R(z_0)$ com z_0 arbitrário em A, é válido para todo o ponto em A. $\square$

Imediatamente obtemos o seguinte resultado.

Corolário 6.7 (Continuação analítica)**.** *Sejam $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $g\colon A \to \mathbb{C}$ analíticas numa região $A \subset \mathbb{C}$. Se existe uma sucessão $z_n \in A$ convergente para $z_0 \in A$ tal que $z_n \neq z_m$, $n \neq m$, e $f(z_n) = g(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, então $f = g$ em A.*

Observação 18. A continuação analítica significa que existe uma única função analítica que toma determinados valores num conjunto de pontos que acumulam noutro ponto da região. Por exemplo, se para $z_n = 1/n$ temos que $f(z_n) = e^{1/n}$, então a única possibilidade da função f ser analítica é se for a exponencial $f(z) = e^z$.

Exercício 50. *Prove que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ é analítica numa região A e igual a $g\colon A \to \mathbb{C}$ ao longo de um caminho em A, então $f = g$ em todo o A.*

6.5 Série de Laurent

Como vimos acima, a série de Taylor é útil quando temos uma função analítica num disco. No caso de a função ter uma singularidade num ponto desse disco (i.e. falha a definição ou a analiticidade nesse ponto), temos como alternativa a expansão em série de potências (incluindo potências negativas), chamada de Laurent.

Teorema 6.8 (Laurent)**.** *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e uma função $f\colon D_r(z_0) - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Então,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad \textit{(série de Laurent)} \tag{6.2}$$

para todo $z \in D_r(z_0) - \{z_0\}$*, com*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{6.3}$$

onde $\gamma = \partial D_r(z_0)$.

Observação 19. Se f é analítica em $D_r(z_0)$, $c_{-n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema de Cauchy. Recuperamos então a série de Taylor.

Demonstração. Escolhemos os caminhos γ_1 e γ_2 descrevendo as circunferências concêntricas em z_0 de raios $r_1 < r_2 < r$, e λ um arco unindo γ_1 a γ_2. O caminho $-\gamma_1 + \gamma_2 + \lambda + (-\lambda)$ é fechado e homotópico a um ponto em $D_r(z_0) - \{z_0\}$ onde f é analítica. Pela fórmula de Cauchy, para z tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_1 + \gamma_2 + \lambda + (-\lambda)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f_1(z) + f_2(z)$$

onde

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{e} \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Os integrais acima não dependem dos caminhos γ_1 e γ_2 (apenas exige-se $r_1 < |z - z_0| < r_2$) pelo teorema de Cauchy. Assim, variando esses caminhos de forma a evitar que z esteja sobre as suas curvas, temos que f_1 e f_2 são analíticas em $D_r(z_0) - \{z_0\}$ (de facto, f_2 é analítica também em z_0 porque $|z - z_0| = 0 < r_2$).

Observe que se $\xi \in \gamma_1([a, b])$,

$$\frac{-1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n,$$

e se $\xi \in \gamma_2([a, b])$,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n.$$

Então, para $z \in D_r(z_0) - \{z_0\}$,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^n \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right] \frac{1}{(z - z_0)^n}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

□

Exercício 51. *Escreva a série de Laurent de*

1. $f(z) = \sin \frac{1}{z^2}$ *para* $0 < |z| < 1$.
2. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ *para*
   (a) $0 < |z| < 1$.
   (b) $|z| > 1$.
   (c) $0 < |z-1| < 1$.
   (d) $|z-1| > 1$.

7 Teorema dos Resíduos

7.1 Classificação de singularidades e resíduos

Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $z_0 \in A$ e $f\colon A - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Chama-se a z_0 **singularidade isolada** de A [12]. A expansão de f em série de Laurent em torno de z_0 é então dada por (6.2), i.e.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

- Se $k = \max\{n \in \mathbb{N} \colon c_{-n} \neq 0\}$ existe, então z_0 diz-se um **pólo de ordem** k [13].
- Se existem infinitos n's tais que $c_{-n} \neq 0$, então z_0 é uma **singularidade essencial**.

O **resíduo de** f **em** z_0 é o coeficiente c_{-1} da série de Laurent de f em torno de z_0 e escreve-se

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}. \tag{7.1}$$

É então fácil verificar que:

- se z_0 é um pólo de ordem 1,
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$
- se z_0 é um pólo de ordem 2,
$$c_{-2} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^2 f(z)$$
e
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \left[f(z) - \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} \right].$$
- se z_0 é um pólo de ordem $k \in \mathbb{N}$,
$$c_{-k} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z),$$
$$c_{-i} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \left[f(z) - \sum_{j=i+1}^{k} \frac{c_{-j}}{(z-z_0)^j} \right] \qquad i = 1, \dots, k,$$
e $\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}$.

[12] A função f diz-se então meromórfica em A.
[13] Um pólo de ordem 0 também é chamado de **singularidade removível** pois significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $c_{-n} = 0$.

Exercício 52. *Calcule* $\operatorname{Res}(f, z_0)$ *para*

1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$, $z_0 = 0$.
2. $f(z) = \frac{z^2}{\sin^2 z}$, $z_0 = 0$.
3. $f(z) = \tan z$, *todas as singularidades.*
4. $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.
5. $f(z) = \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$, $z_0 = i$.
6. $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-1}$, $z_0 = 1$.
7. $f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin^3 z}$, $z_0 = 0$.

7.2 Teorema dos resíduos

Teorema 7.1 (dos resíduos)**.** *Seja* $A \subset \mathbb{C}$ *uma região simplesmente conexa, uma singularidade* $z_0 \in A$, $f\colon A - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ *analítica, e um caminho fechado* $\gamma\colon [a, b] \to A$ *regular por troços tal que* $z_0 \notin \gamma([a, b])$*. Então,*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).\operatorname{rot}(\gamma, z_0). \tag{7.2}$$

Observação 20. Podemos facilmente generalizar o teorema dos resíduos para regiões A contendo um número finito de singularidades isoladas. Bastando para isso considerar uniões de curvas fechadas em regiões contendo apenas uma singularidade.

Demonstração. A série de Laurent de f em redor de z_0 em $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z - z_0| < r\} \subset A$ é

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

onde os coeficientes c_n são dados por (6.3). Logo,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sum_{n \geq 1} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} dz + \int_\gamma \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n dz.$$

Como a função dentro do último integral acima é analítica, pelo teorema de Cauchy o integral é zero. Assim, obtemos

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sum_{n \geq 1} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} dz = c_{-1} 2\pi i \operatorname{rot}(\gamma, z_0),$$

onde utilizámos o teorema fundamental do cálculo para determinar o seguinte integral:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{rot}(\gamma, z_0), & n = 1 \\ \left[\frac{(z-z_0)^{1-n}}{1-n}\right]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

□

Exercício 53. *Calcule*

1. $\int_\gamma (z+1)^{-3} dz$ *com* $\gamma = \partial D_2(0)$ *e* γ *o quadrado com vértices em* $0, 1, 1+i, i$.

2. $\int_\gamma \frac{z}{z^2+2z+5} dz$, *com* $\gamma = \partial D_1(0)$.

3. $\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$, *com* $\gamma = \partial D_2(0)$.

4. $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z^2} dz$, *com* $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, $a, b > 0$ *e* $t \in [0, 2\pi]$.

7.3 Aplicação do teorema dos resíduos a integrais em $\mathbb{R}$

Vamos introduzir a aplicação do teorema de resíduos ao cálculo integral em $\mathbb{R}$ através de exemplos.

Exemplo 4. Queremos calcular o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(y)}{(y^2+1)^2} dy. \tag{7.3}$$

Considere o caminho λ_r que percorre o segmento de recta entre ir e $-ir$, com $r > 1$, e o caminho σ_r correspondendo à curva $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \leq 0, |z| = r\}$. Podemos então definir um caminho fechado simples $\gamma_r = \lambda_r + \sigma_r$ com sentido positivo. Para a função

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2-1)^2}$$

temos que

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{2\mathrm{e}} \quad \text{e} \quad \operatorname{Res}(f, 1) = 0.$$

Logo, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_{\gamma_r} f = \int_{\lambda_r} f + \int_{\sigma_r} f = i\pi\mathrm{e}^{-1}.$$

Note que os integrais são iguais para qualquer escolha de $r > 1$ e que

$$\int_{\lambda_r} f = \int_{-r}^{r} f(iy) i\, dy = i \int_{-r}^{r} \frac{\cos(y) + i\sin(y)}{(y^2+1)^2} dy.$$

Além disso,

$$\left| \int_{\sigma_r} f \right| \leq \sup_{\operatorname{Re} z \leq 0, |z| = r} |f(z)|\, \ell(\sigma_r) \leq \frac{\pi r}{(r^2-1)^2}$$

e

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\sigma_r} f = 0.$$

Queremos calcular o integral (7.3) da função contínua em $\mathbb{R}$ dada por $y \mapsto \cos(y)/(y^2+1)^2$. Esta função é integrável em $\mathbb{R}$ pois é limitada, $\left|\cos(y)/(y^2+1)^2\right| \leq 1/y^2$ e $\int_1^{+\infty} (1/y^2) dy$ converge. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(y)}{(y^2+1)^2} dy &= \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\cos(y)}{(y^2+1)^2} dy = \lim_{r\to+\infty} \operatorname{Im} \int_{\lambda_r} f \\ &= \lim_{r\to+\infty} \operatorname{Im} \left[i\pi\mathrm{e}^{-1} - \int_{\sigma_r} f \right] = \pi\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

Observação 21. Note que uma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável em $\mathbb{R}$ se existem os limites

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f \quad \text{e} \quad \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 f.$$

Nesse caso,

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f + \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 f$$

e em particular temos que o chamado **valor principal do integral**

$$\text{v.p} \int_{\mathbb{R}} f = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^a f$$

é igual ao integral $\int_{\mathbb{R}} f$. Por vezes é possível calcular o valor principal mesmo para funções que não são integráveis.

Lema 7.2. *Seja f analítica com um pólo de ordem* 1 *em z_0, e um caminho $\sigma_r(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [a, b]$. Então,*

$$\lim_{r\to 0} \int_{\sigma_r} f = (b-a)i \operatorname{Res}(f, z_0). \tag{7.4}$$

Demonstração. Podemos escrever a série de Laurent de f em torno de z_0 como

$$f(z) = \frac{\operatorname{Res}(f, z_0)}{z - z_0} + h(z),$$

onde h é analítica. O integral de h sobre σ_r pode ser estimado por

$$\left| \int_{\sigma_r} h \right| \le \sup_{z\in\sigma_r} |h(z)|\, \ell(\sigma_r) = (b-a) r \sup_{z\in\sigma_r} |h(z)| \to 0 \quad \text{quando} \quad r \to 0.$$

Finalmente,

$$\int_{\sigma_r} \frac{\operatorname{Res}(f, z_0)}{z - z_0} dz = (b-a)i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

□

Exemplo 5. Determinar o valor do integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \tag{7.5}$$

Considere para isso a função $f(z) = \mathrm{e}^{iz}/z$ definida em $\mathbb{C} - \{0\}$. Observe que $\operatorname{Im} f(x) = \sin(x)/x$. O ponto $z = 0$ é um pólo simples com $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$.

Sejam $0 < r < R$. Como não podemos integrar a função sobre um caminho que cruze o ponto $z = 0$, escolhemos então um caminho $\gamma = \lambda_{R,r} + \nu_r + \widetilde{\lambda}_{R,r} + \sigma_R$ onde temos os segmentos de recta sobre os reais,

$$\lambda_{R,r}(t) = -R(1-t) - rt \quad \text{e} \quad \widetilde{\lambda}_{R,r}(t) = r(1-t) + Rt,$$

e as semicircunferências centradas em 0,

$$\nu_r(t) = r\mathrm{e}^{-i\pi(1-t)} \quad \text{e} \quad \sigma_R(t) = R\mathrm{e}^{i\pi t},$$

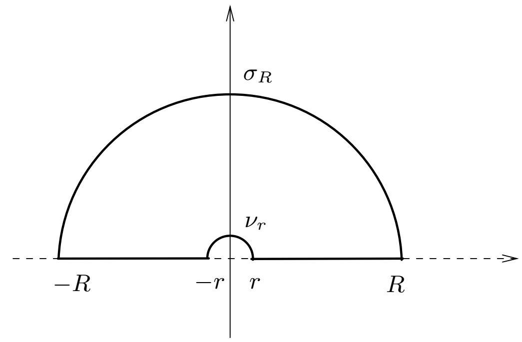

Figura 6: Os caminhos que compõe γ.

com $t \in [0,1]$ (ver Figura 6). Claramente, $\int_\gamma f = 0$.

Para a curva exterior temos

$$\int_{\sigma_R} f = i\pi \int_0^1 \mathrm{e}^{-R\sin(\pi t)+iR\cos(\pi t)} dt,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_R} f \right| &\leq \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{-R\sin(\pi t)} dt \\ &= \pi \left(\int_0^{1/\sqrt{R}} + \int_{1/\sqrt{R}}^{1-1/\sqrt{R}} + \int_{1-1/\sqrt{R}}^1 \right) \mathrm{e}^{-R\sin(\pi t)} dt \\ &\leq \pi \left(\frac{1}{\sqrt{R}} + \mathrm{e}^{-R\sin(\pi/\sqrt{R})} + \frac{1}{\sqrt{R}} \right) \to 0 \quad \text{quando} \quad R \to +\infty. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f \right) + \int_{\nu_r} f = 0.$$

Em particular, reparando que a função integranda abaixo é par, provámos a convergência de

$$\int_r^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\nu_r} f.$$

para qualquer $r > 0$. Usando o Lema 7.2 e tendo em conta o sentido do caminho, $\lim_{r\to 0} \int_{\nu_r} f = -i\pi$. Podemos então concluir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2.$$

Exercício 54. *Calcule*

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ix}}{1+ix} dx$
3. *(*)* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$

Agradecimentos

Agradeço às turmas 3º ano MAEG 2005/06 e 2006/07, em particular a Paulo Lopes, Cláudia Duarte e Pedro Gonçalves, pela ajuda na detecção de gralhas em versões anteriores deste texto.

Referências

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 3rd ed, 1979.

[2] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic Complex Analysis.* Freeman, 3rd ed, 1999.