Difeomorfismo minimal com entropia topológica não nula

João Lopes Dias

Junho 1997

Abstract

Seguimos o procedimento de M. R. Herman (1.) para a construção do primeiro exemplo conhecido de um difeomorfismo F_α minimal com entropia topológica não nula na 4-variedade $M = S^1 \times SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$, onde Γ representa um subgrupo discreto de $SL(2,\mathbb{R})$ tal que o quociente seja compacto e conexo.

1 Introdução

Definição 1 *Seja X um espaço topológico. Um homeomorfismo $h : X \to X$, é dito minimal se para $x \in X$ a órbita de x por h $\{h^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ é densa em X. Além disso, se h é unicamente ergódico então diz-se estritamente ergódico.*

Seja R_α uma rotação na circunferência $S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, com $\alpha \in S^1$:

$$R_\alpha \colon S^1 \to S^1$$
$$R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha$$

Para a construção do difeomorfismo pretendido vamos usar a aplicação anterior pelas suas propriedades referidas na proposição seguinte (ver demonstração em 4.):

Proposição 2 *Para $\alpha \in S^1 \backslash (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, R_α é um difeomorfismo estritamente ergódico, e a única medida invariante é a de Lebesgue m. Além disso, a entropia topológica de R_α é nula, $h(R_\alpha) = 0$. O mesmo se verifica para $R_\alpha^n = R_{n\alpha}, n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.*

Seja $A \in C^\omega(S^1, SL(2,\mathbb{R}))$, ie, uma aplicação analítica de S^1 no grupo das matrizes 2×2 de entradas reais e determinante $= 1$. Com $\lambda > 1$ fixo, escolhemos $A \colon S^1 \to SL(2,\mathbb{R})$ na forma:

$$A(\theta) \equiv A_\theta = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\theta) & -\sin(2\pi\theta) \\ \sin(2\pi\theta) & \cos(2\pi\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}.$$

A, quando aplicado a um vector de $\mathbb{R}^2$, actua como uma dilatação e uma contracção na direcção de cada um dos eixos seguida de uma rotação de um ângulo $2\pi\theta$.

Consideremos $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ um subgrupo discreto tal que $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ seja compacto. De notar que é possível termos Γ' tal que $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma = PSL(2,\mathbb{R})/\Gamma'$, com $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{Id, -Id\}$. Podemos assim identificar o espaço $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ com o fibrado tangente unitário de uma superfície compacta orientável de curvatura $= -1$. Sabemos da geometria hiperbólica que o fibrado tangente unitário de $\mathbb{H}/\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : im(z) > 0\}/\Gamma$, é homeomórfico a $PSL(2,\mathbb{R})$, onde $PSL(2,\mathbb{R})$ é o conjunto das transformações de Möbius (isometrias).

Proposição 3 *Sejam $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, mdc(p,q) \equiv (p,q) = 1$ e $a, b \in S^1$ verificando $1/q = (b-a)/2$. Existe $\theta_0 \in]a,b[$ tal que é minimal o difeomorfismo:*

$$\{\theta_0\} \times SL(2,\mathbb{R})/\Gamma \to \{\theta_0\} \times SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$$
$$(\theta_0, y) \mapsto \left(\theta_0, A^q_{p/q,\theta_0} y\right)$$

onde $A^k_{\alpha,\theta} \stackrel{def}{=} A_{R^{k-1}_\alpha(\theta)} \cdots A_{R_\alpha(\theta)} \cdot A_\theta$.

A proposição anterior (a demonstração baseia-se no facto de a matriz deste difeomorfismo ser conjugada a uma matriz parabólica, que por sua vez representa um fluxo horocíclico, minimal -ver 1.) sugere a construção do seguinte difeomorfismo sobre a 4-variedade $M = S^1 \times SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$, compacta e conexa:

$$F_\alpha : M \to M$$
$$F_\alpha(\theta, y) = (R_\alpha(\theta), A_\theta y).$$

que preserva a medida $\mu = dm \otimes d\nu$, onde ν é a única medida de probabilidade invariante para transformações em $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$, na forma $d\nu = d\mu d\theta$, com $\mu(A) = \int_A \frac{1}{y^2} dx.dy$ a área hiperbólica, e $\theta = \frac{1}{2\pi} arg(u), A \subset H, u \in \mathbb{C}$.

Dos dois teoremas que se seguem concluímos que F_α é um difeomorfismo sobre M onde todas órbitas são densas, com entropia topológica $h = \sup_{\mu - inv} h_\mu$ (h_μ é a entropia métrica) positiva.

Teorema 4 $\forall_{\alpha \in S^1} : h_\mu(F_\alpha) \geq \log(\frac{1}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}) > 0$.

Teorema 5 $\exists_{\alpha \in S^1 \setminus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} : F_\alpha$ *é um difeomorfismo minimal de M.*

2 Demonstração do Teorema 4

Para provarmos a positividade da entropia métrica de F_α, comecemos por mencionar o resultado de Pesin (3.), que estima a entropia métrica pela média espacial dos expoentes de Lyapunov.

Lema 6 (Pesin) *Para a aplicação tangente* $DF_\alpha^n(x)\colon T_x(M) \to T_{F_\alpha^n(x)}(M)$ *verifica-se:*

$$h_\mu(F_\alpha) \geq \int_M \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|DF_\alpha^n(x)\|\, d\mu(x).$$

De forma a este lema ser-nos útil, vamos tentar relacionar a norma do operador linear $DF_\alpha^n(\theta, y)$:

$$DF_\alpha^n(\theta, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ DA_{\alpha,\theta}^n y(\theta) & A_{\alpha,\theta}^n \end{bmatrix}$$

com a da matriz $A_{\alpha,\theta}^n$. A norma do operador linear derivada é calculada pela fórmula:

$$\|DF_\alpha^n(\theta, y)\| = \sup_{(u,v)\neq 0} \frac{\|DF_\alpha^n(\theta, y)\cdot(u,v)\|}{\|(u,v)\|}$$

Logo,

$$\|DF_\alpha^n(\theta, y)\| \geq \sup_{(0,v)\neq 0} \frac{\left\|(0, A_{\alpha,\theta}^n v)\right\|}{\|(0,v)\|}.$$

Vamos associar ao par (R_α, A) o homeomorfismo:

$$\begin{gathered} G\colon S^1\times\mathbb{R}^2 \to S^1\times\mathbb{R}^2 \\ G(\theta,y) = (R_\alpha(\theta), A_\theta y) \\ \Rightarrow G^n(\theta, y) = \left(R_\alpha^n(\theta), A_{\alpha,\theta}^n(y)\right),\ n\in\mathbb{N}. \end{gathered}$$

Seja $\|\cdot\|$ uma norma da álgebra de Banach das transformações lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Por exemplo,

$$\left\|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

De notar que $\|x\|.\|y\| \geq \|x.y\|$.

Concluímos que $\frac{1}{n}\log\|DF_\alpha^n(\theta,y)\| \geq \frac{1}{n}\log\left\|A_{\alpha,\theta}^n\right\|$. Resta então demonstrar que no limite, o segundo membro da desigualdade anterior existe e é positivo, ie, $f(R_\alpha, A)(\theta) \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left\|A_{\alpha,\theta}^n\right\| > 0$.

Usando o Teorema Ergódico de Birkhoff, com $\varphi(\theta) = \log\|A_\theta\|$ integrável, e $T\colon S^1\to S^1, T\theta = R_\alpha(\theta)$ unicamente ergódica, temos, m-qtp,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\left(T^i\theta\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\left\|A_{R_\alpha^{n-1}(\theta)}\right\|\cdots\|A_\theta\|\right) = \int_{S^1}\log\|A_\theta\|\,dm(\theta)$$

$$\geq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\| = f\left(R_\alpha, A\right)$$

Se $B \in SL(2,\mathbb{R})$ então $\left\| BB^{-1} \right\| = \|I\| = 1 \leq \|B\| \cdot \left\| B^{-1} \right\|$. É simples de verificar que $\left\| B^{-1} \right\| \leq c\|B\|$, logo $\|B\| \geq c^{-1/2}$, onde c é uma constante positica que depende da norma escolhida. Assim $f(R_\alpha, A) \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{-\log c}{2n} = 0$.

Se $p, n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n} \log \left\| A^n_{\alpha, R^{in}_\alpha \theta} \right\| = \frac{1}{pn} \log \left(\left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\| \cdot \left\| A^n_{\alpha, R^n_\alpha \theta} \right\| \cdots \left\| A^n_{\alpha, R^{(p-1)n}_\alpha \theta} \right\| \right)$$

$$\geq \frac{1}{pn} \log \left\| A^n_{\alpha,\theta} \cdot A^n_{\alpha, R^n_\alpha \theta} \cdots A^n_{\alpha, R^{(p-1)n}_\alpha \theta} \right\| = \frac{1}{pn} \log \left\| A^{pn}_{\alpha,\theta} \right\|$$

Seja n tal que $\frac{1}{n} \int_{S^1} \log \left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\| dm\left(\theta\right) < \int_{S^1} f\left(R_\alpha, A\right) dm\left(\theta\right) + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Como $R_{n\alpha}$ é unicamente ergódica (proposição 2), novamente pelo Teorema Ergódico, agora com $\varphi\left(\theta\right) = \frac{1}{n} \log \left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\|$ integrável, e $T\colon S^1 \to S^1, T\theta = R^n_\alpha(\theta)$, temos que $\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \varphi\left(T^i\theta\right)$ converge uniformemente em θ $(p \to +\infty)$. Então

$$\frac{1}{pn} \log \left\| A^{pn}_{\alpha,\theta} \right\| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n} \log \left\| A^n_{\alpha, R^{in}_\alpha \theta} \right\| \to \frac{1}{n} \int_{S^1} \log \left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\| dm\left(\theta\right) < f\left(R_\alpha, A\right) + \varepsilon.$$

Escrevendo $k = pn + r, 0 \leq r < n$ obtemos:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_0} \forall_{k \geq k_0} \forall_{\theta \in S^1} - \varepsilon \leq \frac{1}{k} \log \left\| A^k_{\alpha,\theta} \right\| \leq f\left(R_\alpha, A\right) + \varepsilon.$$

Provámos assim que $f\left(R_\alpha, A\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left\| A^n_{\alpha,\cdot} \right\|_{C^0}$, com $A^n_{\alpha,\cdot} \in C^\omega\left(S^1, SL(2,\mathbb{R})\right)$, $\left\| A^n_{\alpha,\cdot} \right\|_{C^0} = \sup_{\theta\in S^1} \left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\|$. Se $f(R_\alpha, A) = 0$, com $k \to +\infty$, $\frac{1}{k} \log \left\| A^k_{\alpha,\theta} \right\| \to 0$ uniformemente.

Seja o espaço $SL(2,\mathbb{C})$, com uma norma $\|\cdot\|$ da álgebra de Banach das aplicações lineares $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Os valores próprios da matriz $\begin{bmatrix} \cos\left(2\pi\theta\right) & -\sin\left(2\pi\theta\right) \\ \sin\left(2\pi\theta\right) & \cos\left(2\pi\theta\right) \end{bmatrix}$ são $e^{\pm 2\pi i\theta}$, sendo U a matriz mudança para a base dos vectores próprios:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} = U^\dagger$$

Definindo uma nova matriz$B_\theta = U^{-1} A_\theta U$, temos:

$$B_\theta = U^{-1} \begin{bmatrix} \cos\left(2\pi\theta\right) & -\sin\left(2\pi\theta\right) \\ \sin\left(2\pi\theta\right) & \cos\left(2\pi\theta\right) \end{bmatrix} U \cdot U^{-1} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} U =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2\pi i\theta} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta} \end{bmatrix} \cdot \Lambda = e^{-2\pi i\theta} C_\theta$$

onde $\Lambda = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2\lambda} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2\lambda} & \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2\lambda} \end{bmatrix}$ e $C_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{4\pi i\theta} \end{bmatrix} \cdot \Lambda = \begin{bmatrix} a & b \\ be^{4\pi i\theta} & ae^{4\pi i\theta} \end{bmatrix}$.

Por recorrência, obtemos:

$$C^n_{\alpha,\theta} = C_{R^{n-1}_\alpha \theta} \cdots C_\theta \ = \begin{bmatrix} a^n + P^1_n(\theta) & b_n + P^2_n(\theta) \\ P^3_n(\theta) & P^4_n(\theta) \end{bmatrix}$$

com $P^j_n(\theta) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a^j_{n,p} e^{4\pi i p\theta}$ e $b_n, a^j_{n,p} \in \mathbb{C}, j = 1,2,3,4$.

Temos também

$$\begin{aligned} B^n_{\alpha,\theta} = B_{R^{n-1}_\alpha \theta} \cdots B_\theta = U^{-1} A_{R^n_\alpha \theta} \cdots A_\theta U = U^{-1} A^n_{\alpha,\theta} U \\ = e^{-2\pi i \sum_{j=0}^{n-1}(\theta + j.\alpha)} C^n_{\alpha,\theta} \end{aligned}$$

logo,

$$\left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\| \geq \left\| B^n_{\alpha,\theta} \right\| = \left\| C^n_{\alpha,\theta} \right\|$$

Podemos então estimar $\left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\|_{C^0}$ por baixo:

$$\left\| \int_{S^1} C^n_{\alpha,\theta} d\theta \right\| \leq \int_{S^1} \left\| C^n_{\alpha,\theta} \right\| d\theta \leq \int_{S^1} \left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\| d\theta \leq \sup_{\theta\in S^1} \left\| A^n_{\alpha,\theta} \right\| = \left\| A^n_{\alpha,\cdot} \right\|_{C^0}$$

Ora

$$\left\| \int_{S^1} C^n_{\alpha,\theta} d\theta \right\| = \left\| \begin{bmatrix} a^n & b_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \geq a^n.$$

Assim, $\frac{1}{n} \log \left\| A^n_{\alpha,\cdot} \right\|_{C^0} \geq \log a$, o que implica: $f\left(R_\alpha, A\right) = \geq \log a$.

Finalmente, para todo $\alpha \in S^1$,

$$h(F_\alpha) \geq \int_M \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| DF^n_\alpha(\theta, y) \right\| d\mu(\theta, y) \geq$$

$$\geq \int_{S^1} f\left(R_\alpha, A\right)(\theta)\, dm(\theta) \geq \log\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right) > 0.$$

□

3 Demonstração do Teorema 5

Para provar que F_α é minimal, vamos utilizar o próximo resultado, mais prático que a definição 1 (ver 2.):

Lema 7 *Seja $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma base de abertos $\neq \emptyset$ de M, então $F_\alpha \colon M \to M$ é um difeomorfismo minimal sse* $\forall_{U_i} \exists_{n\in\mathbb{N}} : \bigcup_{p=0}^{n} F^p_\alpha(U_i) = M$.

Seja então $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma base de abertos $\neq \emptyset$ de M. Consideremos, para i fixo, o conjunto:

$$W_{U_i} = \left\{ \alpha \in S^1 : \exists n \in \mathbb{N} : \bigcup_{p=0}^{n} F_\alpha^p (U_i) = M \right\}$$

que é um conjunto aberto (ver 2.). De notar que, pelo lema anterior, F_α é minimal sse $\alpha \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_{U_i}$. Se mostrarmos que $\overline{W_{U_i}} = S^1$ então $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_{U_i}$ é denso, pelo Teorema de Categoria de Baire.

Concentremo-nos no caso $U_i = I \times V$, onde $I =]a, b[\subset S^1$ e V um aberto $\neq \emptyset$ de $SL(2,\mathbb{R})$ (difeomórfico a uma bola aberta de $\mathbb{R}^3$). Da proposição 3 sabemos que, para $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$ tal que $1/q = (b-a)/2$, o difeomorfismo $y \mapsto F_{p/q}^q (\theta_0, y)$ de $\{\theta_0\} \times N$, $N = SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ é minimal. Então, existe $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\theta_0\} \times N = \bigcup_{k=0}^{n} F_{p/q}^{kq} (\{\theta_0\} \times V) \subset \bigcup_{k=0}^{n} F_{p/q}^{kq} (I \times V) = U$$

Sejam:

1. $K = [a_1, b_1] \times N, a_1 < \theta_0 < b_1$, tal que $K \subset U$.
2. $\{C_k\}_{0\leq k \leq n}$ conjuntos compactos ($\neq \emptyset$) tais que $\bigcup_{k=0}^{n} (C_k \cap K) = K$ e verificando $C_k \subset F_{p/q}^{kq} (I \times V)$.
3. O aberto $V_k = \left\{ \alpha \in S^1 : F_\alpha^{-kq} (C_k) \subset I \times V \right\}$ ($\neq \emptyset$ pois $p/q \in V_k$).

Se $\alpha \in \bigcap_{k=0}^{n} V_k \neq \emptyset$, temos:

$$\bigcup_{k=0}^{n} F_\alpha^{kq} (I \times V) \supset (]a_1, b_1[\times N).$$

Se, além disso, $\alpha \in S^1 \backslash (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, temos:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_\alpha^n (]a_1, b_1[\times N) = M$$

e logo, $\alpha \in W_{I\times V}$.

$W_{I\times V}$ é assim denso pois contém no seu fecho todos os $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que verificam $(p,q) = 1, 1/q < (b-a)/2$. □

4 Bibliografia

1. M. R. Herman, *Construction d'un difféomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1**, 65-76 (1981).

2. A. Fathi & M. R. Herman, *Existence de difféomorphismes minimaux*, Proc. Conf. Systèmes dynamiques, Varsovie (1977), Astérisque **49**, 37-59 (1979).

3. J. B. Pesin, *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Russian Math. Surveys **32**, 55-114 (1977).

4. A. Katok & B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995).