Notas de Análise de Fourier e aplicação a edp's

João Lopes Dias*
Departamento de Matemática, ISEG
Universidade Técnica de Lisboa
Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal

11 de Dezembro de 2006

Resumo

Estas notas destinam-se à cadeira "Análise Real e Complexa" (1º Semestre 2005-2006) do 3º ano da Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão do ISEG - Universidade Técnica de Lisboa. Para as seguir pressupõe-se os conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Álgebra Linear, Análise Matemática em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^d$ (incluindo integral de Lebesgue), Análise Complexa e Equações Diferenciais Ordinárias.

Conteúdo

*Email: jldias@iseg.utl.pt

1 Séries de Fourier

O objectivo central a que nos propomos neste texto é o de encontrar funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possam ser expressas na forma de uma série trigonométrica na forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi nx/T) + b_n \sin(2\pi nx/T)] \tag{1.1}$$

com coeficientes $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ e $T \neq 0$. Podemos reescrever a série acima na forma que iremos usar ao longo destas notas:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi ikx/T}, \tag{1.2}$$

onde $c_k \in \mathbb{C}$. A uma série nesta forma dá-se o nome de **Série de Fourier**.

Exercício 1. *Mostre que* (1.1) *e* (1.2) *são iguais, i.e. determine c_k, $k \in \mathbb{Z}$, em função de a_n e b_n, $n \in \mathbb{N}$, e vice-versa.*

1.1 Funções periódicas

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **periódica de período** T, ou T-periódica, se verifica

$$f(x+T) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.

- sin e cos são ambas funções 2π-periódicas. Por outro lado, as funções $x \mapsto \sin(2\pi x)$ e $x \mapsto \cos(2\pi x)$ são 1-periódicas.
- A função $x \mapsto x - [x]$, onde $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq x\}$ é a parte inteira de x, é uma função 1-periódica.

Observação 1.

- Qualquer função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja T-periódica pode ser "rescalada" de forma a obtermos uma função 1-periódica $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

  $$g(x) = f(Tx).$$

  De facto, $g(x+1) = f(Tx+T) = f(Tx) = g(x)$.
- Note que toda a informação sobre uma função 1-periódica [1] encontra-se no intervalo $[0,1[$, pois

  $$f(x) = f(x - [x])$$

  onde $x - [x] \in [0,1[$.

[1] As funções 1-periódicas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podem ser estudadas como funções sobre uma circunferência $\{(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \in \mathbb{R}^2\colon x \in [0,1[\}$. Outra forma de interpretação do mesmo facto será considerar o intervalo $[0,1]$ onde os pontos extremos se identificam. Também se pode estudar este conjunto considerando a relação de equivalência entre dois números reais x e y dada por $y = x \bmod 1$. Finalmente, o conjunto $\mathbb{T} = \{C_x\colon x \in [0,1[\}$ onde $C_x = \{y \in \mathbb{R}\colon y - x \in \mathbb{Z}\}$, define a colecção das classes de equivalência que incluem todos os pontos que são equivalentes entre si.

- Pelas razões acima, iremos restringir o nosso estudo a funções definidas no intervalo $[0,1[$, tendo sempre presente o facto que pretendemos construir funções periódicas em $\mathbb{R}$. Assim, neste contexto uma função contínua f em $[0,1[$ terá que satisfazer a condição adicional:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(0).$$

- Em alternativa, podemos considerar funções f em $[0,1]$ com a restrição $f(0) = f(1)$, de forma a ser 1-periódica. Representamos essas funções na forma:
$$f\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R}.$$
Agora a continuidade da função 1-periódica em $\mathbb{R}$ corresponde à continuidade de f.

De forma a simplificar as notações, escrevemos

$$C^0_{per}([0,1]) = \{\text{funções } f\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R} \text{ contínuas}\}$$

e

$$C^r_{per}([0,1]) = \{\text{funções } f\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^r\}.$$

Uma função $f\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ diz-se

- **par** sse a extensão periódica $f\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R}$ é par;
- **ímpar** sse a extensão periódica $f\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R}$ é ímpar.

Exercício 2.

1. *Mostre que $f\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ é par sse $f(x) = f(1-x)$, $x \in [0,1]$. Ou seja, a função é simétrica em relação à recta $x = \frac{1}{2}$.*
2. *Mostre que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é ímpar sse $f(x) = -f(1-x)$, $x \in [0,1]$. Deduza que neste caso verifica-se necessariamente $f(0) = 0$.*

1.2 Os espaços vectoriais $L^1([0,1])$ e $L^2([0,1])$

Muitas das funções que estaremos interessados em estudar não são necessariamente contínuas. Será de grande utilidade assim um espaço de funções mais geral. O requisito é a integrabilidade (à Lebesgue) dessas funções. Para isso, dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ definimos o espaço

$$L^1(I) = \left\{\text{funções } f\colon I \to \mathbb{C} \text{ tais que } \int_I |f| < +\infty\right\},$$

das funções integráveis à Lebesgue relativamente à medida de Lebesgue. Note que uma função contínua num intervalo compacto I pertence necessariamente a $L^1(I)$.

Um outro espaço de utilidade nestas notas corresponde às funções de quadrado integrável:

$$L^2(I) = \left\{\text{funções } f\colon I \to \mathbb{C} \text{ tais que } |f|^2 \in L^1(I)\right\}.$$

Exercício 3. *Mostre que $L^1([0,1])$ e $L^2([0,1])$ são espaços vectoriais e que $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$.*

Podemos ainda definir normas[2] nestes espaços vectoriais:

$$\|f\|_{L^1} = \int_I |f| \quad \text{e} \quad \|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_I |f|^2} \tag{1.3}$$

A função "zero" neste contexto não se resume apenas a $f(x) = 0$, $x \in I$. Isto porque para outras funções o integral do módulo pode ser nulo. Basta que se anulem quase por toda a parte ($f = 0$ q.t.p.). Ou seja, apenas num conjunto de medida de Lebesgue nula é que a função é diferente de zero. De facto, duas funções são consideradas iguais se se igualarem q.t.p. Consequentemente, a igualdade de funções nestes espaços é re-definida: $f = g$ sse $f - g = 0$ q.t.p.

Exercício 4. *Mostre que* $\|\cdot\|_{L^1}$ *e* $\|\cdot\|_{L^2}$ *são de facto normas.*

1.3 Convergência de séries de funções contínuas e diferenciáveis

Proposição 1.1. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *e uma sucessão de funções* $u_n \colon I \to \mathbb{R}$ *contínuas. Se* $\sum u_k$ *converge uniformemente em* I*, então* $\sum u_k$ *é contínua em* I*, i.e.*

$$\lim_{x \to x_0} \sum u_k(x) = \sum \lim_{x \to x_0} u_k(x) = \sum u_k(x_0).$$

Demonstração. Sejam

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{e} \quad S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x). \tag{1.4}$$

As hipóteses da proposição implicam que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} |S_n(x) - S_n(x_0)| = 0.$$

Para $x, x_0 \in I$ temos que

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|.$$

Logo, S é contínua em I. □

Proposição 1.2. *Sejam um intervalo* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *e uma sucessão de funções* $u_n \in L^1(I)$*. Se* $\sum u_k$ *converge uniformemente em* I*, então* $\sum u_k \in L^1(I)$ *e*

$$\int_I \sum u_k = \sum \int_I u_k. \tag{1.5}$$

[2]Uma norma num espaço vectorial complexo V é uma função $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ para $f, g \in V$ (desigualdade triangular);
2. $\|cf\| = |c| \, \|f\|$ para $c \in \mathbb{C}$ e $f \in V$;
3. $\|f\| = 0$ sse $f = 0$.

Demonstração. Usando as notações introduzidas em (1.4),

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_I u_k(x)\,dx - \int_I S(x)\,dx\right| = \left|\int_I \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x)\right] dx\right|$$
$$\leq \ell(I) \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)|\,.$$

Logo, como S_n converge uniformemente para S, provamos (1.5). □

Proposição 1.3. *Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma sucessão de funções $u_n\colon I \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Se $\sum u_n'$ converge uniformemente em I e existe $x_0 \in I$ para o qual $\sum u_n(x_0)$ converge, então $\sum u_k$ converge pontualmente, é diferenciável e*

$$\left(\sum u_n\right)' = \sum u_n'. \tag{1.6}$$

Exercício 5. *Demonstre a Proposição 1.3.*

1.4 * Propriedades de $L^1([0,1])$ e $L^2([0,1])$

1.5 Produto interno em $L^2([0,1])$

Considere a seguinte operação entre funções f e g em $L^2([0,1])$:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Exercício 6. *Mostre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno*[3] *e que $\langle f, f\rangle = \|f\|_{L^2}^2$.*

Exercício 7. *Seja $\varphi_k(x) = e^{2\pi i k x}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mostre que $\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \delta_{n,m}$ onde*

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

1.6 Coeficientes e série de Fourier

Dada uma função $f \in L^1([0,1])$ definimos os **coeficientes de Fourier** de f como os números complexos:

$$f_k = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Exercício 8. *Mostre que para a função*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi i k x}, \qquad x \in [0,1],$$

assumindo que a série acima converge uniformemente, temos que $f_k = c_k$.

[3] Um produto interno entre dois vectores verifica as propriedades:

1. $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$;
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0$ sse $u = 0$.

Dada uma função $f \in L^1([0,1])$, podemos calcular os coeficientes de Fourier e escrever a **série de Fourier de** f

$$S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \mathrm{e}^{2\pi i k x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

A série de Fourier de f é assim uma função 1-periódica definida para todo o $\mathbb{R}$.

Observação 2. Note que usando a notação introduzida na secção 1.5,

$$f_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \qquad S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_k \rangle \, \varphi_k(x).$$

Exercício 9. *Escreva a série de Fourier S_f de*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0, & x \in [0, \frac{1}{2}[\end{cases}$$

calculando os respectivos coeficientes de Fourier.

Proposição 1.4 (Desigualdade de Bessel)**.** *Se $f \in L^2([0,1])$, então*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2 \leq \int_I |f|^2 . \tag{1.9}$$

Observação 3. A desigualdade de Bessel não implica que a série de Fourier de $f \in L^2([0,1])$ convirja uniformente. I.e. o facto de $\sum_k |f_k|^2$ convergir não implica que $\sum_k |f_k|$ também convirja. Basta para isso pensar no caso $|f_k| = 1/|k|$ para $k \neq 0$, que corresponde à função

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi x, & x \in [0, 1[\\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Demonstração. Escrevendo

$$S_n(x) = \sum_{|k|\leq n} f_k \mathrm{e}^{2\pi i k x} \tag{1.10}$$

temos então

$$\|S_n\|_{L^2}^2 = \langle S_n, S_n \rangle = \sum_{|k|\leq n} \sum_{|k'|\leq n} f_k \overline{f_{k'}} \langle \varphi_k, \varphi_{k'} \rangle = \sum_{|k|\leq n} |f_k|^2. \tag{1.11}$$

Queremos assim provar que o limite quando $n \to +\infty$ de $\|S_n\|_{L^2}$ existe e é menor ou igual a $\|f\|_{L^2}$.

Repare agora que

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_{L^2}^2 &= \langle f - S_n, f - S_n \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle f, S_n \rangle + \langle S_n, S_n \rangle \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{|k|\leq n} \overline{f_k} \langle f, \varphi_k \rangle + \|S_n\|_{L^2}^2 \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{|k|\leq n} |f_k|^2 + \|S_n\|_{L^2}^2 \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - \|S_n\|_{L^2}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|S_n\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

□

Lema 1.1 (Riemann-Lebesgue). *Se* $f \in L^2([0,1])$*, então*

$$\lim_{|k|\to+\infty} f_k = 0, \tag{1.12}$$

onde $f_k \in \mathbb{C}$ *são os coeficientes de Fourier de* f*.*

Demonstração. Como pela desigualdade de Bessel a série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2$ converge, então

$$\lim_{|k|\to+\infty} |f_k|^2 = 0,$$

o que implica (1.12). □

Exercício 10. *Seja* $M_n = \int_I |f^{(n)}|$*,* $I = [0,1]$*, e* c_k *os coeficientes de Fourier de* f*. Prove as seguintes propriedades de decaimento de* c_k*:*

1. *Se* $f \in L^1([0,1])$*, então* $|c_k| \leq M_0$*.*
2. *Se* $f \in C_{per}^{r-1}([0,1])$ *e* $f^{(r)} \in L^1([0,1])$ [4]*, então* $|c_k| \leq (2\pi|k|)^{-r} M_r$*,* $k \neq 0$*.*

Exercício 11. *Encontre uma solução para a edo:* $y' + 2y = \sin(2\pi t)$*,* $t \in \mathbb{R}$*. Assuma para isso que* $y(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k t}$ *e encontre os valores de* c_k*.*

Teorema 1.2 (Unicidade da série de Fourier). *Sejam* $f, g \in L^2([0,1])$*. Se* $S_f = S_g$ *(i.e. os coeficientes de Fourier são iguais), então* $f = g$ *q.t.p.*

Demonstração. Considere $h = f - g$. Os respectivos coeficientes de Fourier são $h_k = 0$, logo usando (1.9) obtemos que $\int |h|^2 = 0$ e $h = 0$ q.t.p. □

1.7 *Identidade de Parseval e uma base para $L^2([0,1])$

1.8 Teorema de Fourier

Queremos agora determinar qual a relação[5] entre f e S_f, em particular em que condições temos

$$f = S_f.$$

Observação 4. Note que mesmo sendo f contínua, existem exemplos para os quais $f \neq S_f$ (ver observação 6).

Definição 1.1. Uma função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é **contínua por troços** se tem apenas um número finito de descontinuidades nos pontos $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$, e os limites laterais

$$\lim_{x\to a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a_j^-} f(x), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.13}$$

são finitos.

[4] Note que isto significa que a derivada de ordem r existe em pontos suficientes de forma a ser integrável.

[5] A igualdade entre f e a sua série de Fourier será de grande utilidade em muitas aplicações. E.g. no estudo de equações diferenciais, pois, como iremos ver, nessas circunstâncias $f'(x) = S_f'(x) = \sum f_k (e^{2\pi i k x})' = \sum 2\pi i k f_k e^{2\pi i k x}$.

Observação 5.

- Se f é contínua por troços, então $f \in L^2([0,1])$.
- Se f tem pontos de descontinuidade, então S_f não pode convergir uniformemente (caso contrário, pela Proposição 1.1 f teria que ser contínua). Ou seja, f não pode ser igual a S_f em todos os pontos.

Exemplo 2.

1. Qualquer função contínua é contínua por troços.
2. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in]0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
   não é contínua por troços.
3. $$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   não é contínua por troços.
4. $f(x) = nx - [nx]$ com $n \in \mathbb{N}$, é contínua por troços.
5. $f(x) = \operatorname{sinal}(x + \frac{1}{2})$ é contínua por troços.

Definição 1.2. Uma função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é **diferenciável por troços** se f e f' são contínuas por troços[6].

Exemplo 3.

1. As funções 4 e 5 no Exemplo 2 que são contínuas por troços também são diferenciáveis por troços.
2. $$f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}, \qquad x \in [0,1],$$
   é contínua, mas não diferenciável por troços pois em $]0,1[$
   $$f'(x) = \frac{-\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

Teorema 1.3 (Fourier)**.** *Se $f\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R}$ é diferenciável por troços, então*

$$S_f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}. \tag{1.14}$$

A demonstração deste teorema baseia-se numa versão mais simples dada pelo lema seguinte.

[6] Note que a derivada f' não está definida em todos os pontos, e.g. nos pontos onde f é descontínua.

Lema 1.4. *Se* $h\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável por troços e contínua em* 0 *com* $h(0)=0$, *então*

$$S_h(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k = 0, \tag{1.15}$$

onde h_k *são os coeficientes de Fourier de* h.

Demonstração. Considere a função $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{h(x)}{e^{2\pi i x}-1}, & x \in]0,1[\\ \frac{h'(0^+)}{2\pi i}, & x=0 \\ \frac{h'(1^-)}{2\pi i}, & x=1. \end{cases}$$

Como h é contínua por troços, g é contínua por troços no intervalo $]0,1[$. Falta verificar o que se passa nos extremos desse intervalo. Para isso calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x}\frac{x}{e^{2\pi i x}-1} = \frac{h'(0^+)}{2\pi i} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = \frac{h'(1^-)}{2\pi i},$$

onde usámos o facto que h é contínua em 0 e 1, e diferenciável por troços, logo existem as derivadas laterais de h em 0 e 1. Temos então que g é contínua por troços em $[0,1]$, em particular $g \in L^2([0,1])$. Note que g é periódica sse h é diferenciável em 0.

Calculemos agora os coeficientes de Fourier de h:

$$h_k = \int_0^1 g(x)(e^{2\pi i x}-1)e^{-2\pi i k x}dx = g_{k-1} - g_k.$$

Então,

$$\sum_{k=-m}^{n} h_k = g_{-m-1} - g_n.$$

Do facto de $g\in L^2([0,1])$, usamos o Lema 1.1 quando $n,m\to+\infty$ para demonstrar (1.15). $\square$

Demonstração do Teorema 1.3. Vamos transformar a função f numa outra h nas condições do Lema 1.4. Para cada $x_0\in[0,1]$ escolhemos

$$h(x) = \begin{cases} f(x+x_0) + f(-x+x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)], & x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

que é diferenciável por troços. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} f(x+x_0) + f(-x+x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)] = 0,$$

i.e. h é contínua em 0, com $h(0)=0$. Pelo Lema 1.4 temos que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k = 0,$$

onde

$$h_k = \int_0^1 h(x)e^{-2\pi i k x}dx = \begin{cases} f_k e^{2\pi i k x_0} + f_{-k}e^{-2\pi i k x_0}, & k\neq 0 \\ 2f_0 - [f(x_0^+)+f(x_0^-)], & k=0, \end{cases}$$

onde f_k são os coeficientes de Fourier de f. Isto implica que para $x_0\in[0,1]$,

$$2f_0 - [f(x_0^+)+f(x_0^-)] + 2\sum_{k\neq 0} f_k e^{2\pi i k x_0} = 0$$

que é a fórmula (1.14). $\square$

Exercício 12. *Escreva a série de Fourier* S_f *de*

1. *da função no exercício 9*

   (a) *usando o teorema de Fourier;*

   (b) *para* $x = \frac{1}{4}$*, aproveitando para calcular a soma da série de Leibniz:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

2. $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Exercício 13. *Mostre que se* $f \in L^1([0,1])$ *e é*

1. *par, então*

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x) \quad \textit{com} \quad a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

2. *ímpar, então*

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n x) \quad \textit{com} \quad b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observação 6.

- Em 1966 Carleson provou o seguinte teorema: *Se* $f \in L^2([0,1])$*, então* $f = S_f$ *q.t.p.* A demonstração deste resultado feita por Carleson encontra-se fora do âmbito destas notas[7] (ver L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier Series*, Acta Math. 116, 135-157 (1966)).

- O resultado de Carleson não pode ser melhorado em relação ao conjunto de pontos onde a série converge, como Kahane e Katznelson demonstraram: *Seja* $E \subset [0,1]$ *com medida de Lebesgue nula. Então existe* $f \in C^0_{per}([0,1])$ *tal que* $f \neq S_f$ *em* E*.*

- Hunt em 1967 demonstrou que $L^2([0,1])$ não é o mais geral dos conjuntos de funções cuja série de Fourier converge q.t.p. De facto, ele provou que: *Se* $f \in L^p([0,1])$ *com* $p > 1$*, então* $S_f = f$ *q.t.p.* (ver R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series, orthogonal expansions and their continuous analogies*, Proc. Conference at Edwardsville, Ill. Southern Illinois Univ. Press, 235-255 (1967). O espaço $L^p([0,1])$ corresponde às funções tais que $\int |f|^p < \infty$.

- Anteriormente, nos anos 1920 Kolmogorov apresentou um exemplo de uma função em $L^1([0,1])$ cuja série de Fourier é diferente da função q.t.p.

[7] Este teorema é uma das razões pelas quais Lennart Carleson (1928-) recebeu o prémio Abel em 2006 (http://www.abelprisen.no/en/prisvinnere/2006/marcus/index.html).

1.9 Corolário de Fourier

Observação 7. Se $f \in C^0_{per}([0,1])$ e diferenciável por troços, então $f' \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$. Podemos assim calcular os coeficientes de Fourier de f':

$$\begin{aligned} f'_k = \int_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi ikx}dx &= \Big[f(x)\mathrm{e}^{-2\pi ikx}\Big]_0^1 + 2\pi ik\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-2\pi ikx}dx \\ &= 2\pi ikf_k, \end{aligned} \tag{1.16}$$

e a desigualdade de Bessel garante $\sum |f'_k| \leq \int_I |f'|^2$.

Corolário 1.5 (Fourier)**.** *Se $f \in C^0_{per}([0,1])$ e diferenciável por troços, então S_f converge absoluta e uniformemente e $f = S_f$.*

Demonstração. Pelo teorema de Fourier, S_f converge pontualmente e $S_f = f$, uma vez que f é contínua e os limites laterais são iguais à função em cada ponto. Resta provar que a convergência da série de Fourier é uniforme e absoluta.

Considere os coeficientes de Fourier de f' dados por (1.16). Assim, para $k \neq 0$,

$$\left|f_k\mathrm{e}^{2\pi ikx}\right| = |f_k| = \frac{|f'_k|}{2\pi|k|}.$$

Basta então provar que a série de termo geral $|f'_k|/|k|$ é convergente. Ora, para cada $k \neq 0$, temos que $|f'_k| \leq 1/|k|$ ou $1/|k| \leq |f'_k|$. Assim obtemos a desigualdade

$$\frac{|f'_k|}{|k|} \leq |f'_k|^2 + \frac{1}{|k|^2}.$$

Como as séries

$$\sum_{k\neq 0} |f'_k|^2 \leq \int_I |f'|^2 \quad \text{e} \quad \sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|^2}$$

são convergentes, completamos a demonstração. ∎

1.10 Funções definidas noutros intervalos e extensões

Podemos usar os teorema e corolário de Fourier para funções mais gerais, viz. funções $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ definidas num intervalo. Para isso basta considerar a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = g((1-x)\alpha + x\beta).$$

Assim, $S_g(x) = S_f((x-\alpha)/(\beta-\alpha))$ em $[\alpha,\beta]$.

Exercício 14. *Mostre que para $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ absolutamente integrável temos que*

$$S_g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\mathrm{e}^{2\pi ik(x-\alpha)/(\beta-\alpha)}, \quad x \in [\alpha,\beta],$$

onde os coeficientes de Fourier de g são dados por

$$g_k = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{e}^{-2\pi ik(x-\alpha)/(\beta-\alpha)}dx.$$

Exercício 15. *Calcule a série de Fourier das seguintes funções f periódicas e decida se $f = S_f$.*

1. $$f(x) = \begin{cases} L - x, & x \in [0, L] \\ L + x, & x \in [-L, 0] \end{cases}$$

   com período $2L$.

2. $f(x) = x^2$ *para* $x \in [-L, L]$ *com período* $2L$*. Mostre também que*
   $$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nalgumas situações precisamos de extender uma dada função $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ a um intervalo maior de forma a termos um período $T > \beta - \alpha$. Temos então que completar a função para o intervalo $[\beta, \alpha + T[$. Assim, construímos a função

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [\alpha, \beta[\\ h(x), & x \in [\beta, \alpha + T[, \end{cases}$$

onde h é uma função à escolha. Se quiseremos que $\widetilde{g}$ seja contínua ou diferenciável, outras condições terão que ser impostas a h. Para estudar $\widetilde{g}$ definimos a função

$$f(x) = \widetilde{g}(x/T)$$

e determinamos a sua série de Fourier. Logo

$$S_{\widetilde{g}}(x) = S_f(Tx).$$

Conforme a escolha de T e de h obteremos diferentes funções f, logo diferentes séries de Fourier.

Exercício 16. *Mostre que se $f \in L^1([\alpha, \beta])$ e é*

1. *par, então*
   $$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\right)$$
   com
   $$a_0 = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

2. *ímpar, então*
   $$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\right)$$
   com
   $$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 17.

1. *Escreva* $g(x) = x$ *para* $x \in [0, \pi]$ *como uma série de senos.*

2. *Escreva* $g(x) = x$ *para* $x \in [0, \pi]$ *como uma série de cossenos.*

Exercício 18. *Seja* $f \in L^1([0,1])$ *tal que* $f(0) = f(1)$.

1. *Mostre que*

$$S_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \sin(\pi n x) \qquad \textit{com} \quad f_n = 2(-1)^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi n x)\,dx.$$

2. *Escreva a série de Fourier de* f *como uma série apenas de termos em cada uma das seguintes formas:*

$$\sin(2\pi n x), \sin(\pi n x/2), \cos(2\pi n x), \cos(\pi n x), \cos(\pi n x/2).$$

Sugestão: Para cada caso use uma extensão de f *a um intervalo conveniente para calcular os coeficientes de Fourier de ordens par e ímpar.*

1.11 Integração de séries de Fourier

Teorema 1.5. *Seja* $f\colon [0,1]_{per} \to \mathbb{R}$ *contínua por troços e sejam* f_k *os coeficientes de Fourier de* f. *Então,*

1. *a função*

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - f_0]dt$$

é 1-periódica e contínua, F' *é contínua por troços e* $F = S_F$, *e*

2.

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \int_0^x \mathrm{e}^{2\pi i k t}dt.$$

Observação 8. No teorema acima f não é necessáriamente igual à sua série de Fourier S_f.

Demonstração. Pela construção F é contínua, e pelo teorema fundamental do cálculo, F' existe onde f é contínua, pelo que é diferenciável por troços. É também 1-periódica pois

$$\begin{aligned} F(x+1) &= F(x) + \int_x^1 [f(t) - f_0]dt + \int_1^{1+x} [f(t) - f_0]dt \\ &= F(x) + \int_0^1 [f(t) - f_0]dt = F(x). \end{aligned}$$

Pelo teorema de Fourier $F = S_F$.

Finalmente, os coeficientes de Fourier de F são, para $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_k &= \int_0^1 F(x)\mathrm{e}^{-2\pi i k x}dx \\ &= \left[\frac{F(x)\mathrm{e}^{-2\pi i k x}}{-2\pi i k}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i k}\int_0^1 F'(x)\mathrm{e}^{-2\pi i k x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi i k}\int_0^1 [f(x) - f_0]\mathrm{e}^{-2\pi i k x}dx = \frac{f_k}{2\pi i k}. \end{aligned}$$

Por outro lado $F(0) = 0 = \sum F_k$, logo

$$F_0 = -\sum_{k\neq 0} \frac{f_k}{2\pi i k}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^x f = f_0 x + F(x) &= f_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k \mathrm{e}^{2\pi i k x} \\
&= f_0 x - \sum_{k\neq 0} \frac{f_k}{2\pi i k} + \frac{f_k \mathrm{e}^{2\pi i k x}}{2\pi i k} \\
&= \int_0^x f_0 dt + \sum_{k\neq 0} \frac{f_k(\mathrm{e}^{2\pi i k x} - 1)}{2\pi i k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \int_0^x \mathrm{e}^{2\pi i k t} dt.
\end{aligned}$$

$\square$

1.12 * Fenómeno de Gibbs

Quando pretendemos aproximar uma função f por uma soma finita de funções trigonométricas podemos considerar a soma parcial dos termos da sua série de Fourier S_f. Esta é de facto uma boa aproximação para f contínua, sendo melhorada ao se considerarem mais termos da série. Porém, se f tem pontos de descontinuidade, mesmo tomando um número elevando de termos, a aproximação não é boa (como iremos ver de seguida para um exemplo concreto). Neste caso existe sempre um erro na vizinhança dos pontos de descontinuidade de cerca de 8.9% do valor do "salto" da função. Este facto é conhecido como o **fenómeno de Gibbs**.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

A sua série de Fourier e respectiva soma parcial são dadas por:

$$S_f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k\neq 0} \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k}, \qquad S_n(x) = \frac{1}{2} - \sum_{0<|k|\leq n} \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2} - \sum_{0<|k|\leq n} \left(\int_0^x e^{2\pi i k t}\, dt + \frac{1}{2\pi i k} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \int_0^x \sum_{0<|k|\leq n} e^{2\pi i k t}\, dt.
\end{aligned}$$

Para calcular o valor da soma dentro do integral acima, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{0<|k|\leq n} e^{2\pi ikt} &= \sum_{k=1}^{n}(e^{2\pi it})^n + (e^{-2\pi it})^n \\ &= e^{2\pi it}\frac{1-e^{2\pi int}}{1-e^{2\pi it}} + e^{-2\pi it}\frac{1-e^{-2\pi int}}{1-e^{-2\pi it}} \\ &= e^{\pi it}\frac{e^{\pi it}-e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})t}-e^{-\pi it}+e^{-2\pi i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{\pi it}(e^{-\pi it}-e^{\pi it})} \\ &= -1+\frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2}+x-\int_0^x \frac{\sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)}{\pi t}\,dt + \int_0^x \sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)\left(\frac{1}{\pi t}-\frac{1}{\sin(\pi t)}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}+x-\int_0^{2\pi(n+\frac{1}{2})x}\frac{\sin t}{\pi t}\,dt + \int_0^x H_n(t)\,dt,\end{aligned}$$

após uma mudança de variável e definindo

$$H_n(t) = \begin{cases} \sin(2\pi(n+\frac{1}{2})t)\left(\frac{1}{\pi t}-\frac{1}{\sin(\pi t)}\right), & t\in]0,1[\\ 0, & t=0 \\ -(2n+1), & t=1. \end{cases}$$

Note que a função $G(y)=\int_0^y \frac{\sin t}{t}\,dt$ tem um máximo local em $y=\pi$ pois $G'(\pi)=0$ e $G''(\pi)=-\pi^{-1}<0$. Podemos calcular esse valor numericamente, sendo aproximadamente

$$G(\pi)\simeq \pi\left(1.08949-\frac{1}{2}\right).$$

Exercício 19.

1. *Prove que a função integranda H_n é contínua em $[0,1]$ e tem zeros em $0, \frac{\pi}{2n+1}, \ldots, \frac{2n\pi}{2n+1}$.*
2. *(*) Mostre que $\eta(t)=\frac{1}{\pi t}-\frac{1}{\sin(\pi t)}$ é decrescente com $\eta(0^+)=0$ e*

$$M_n = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2n+1}]}|H_n(t)| \leq \left|\eta\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|.$$

Finalmente, considerando o ponto $x=\frac{1}{2n+1}$, a soma parcial dos termos da série de Fourier é dada por

$$\begin{aligned}S_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi t}\,dt + \int_0^{\frac{1}{2n+1}} H_n(t)dt \\ &\simeq -0.08949+\frac{1}{2n+1}+\int_0^{\frac{1}{2n+1}} H_n(t)dt\end{aligned}$$

onde $\left|\int_0^{\frac{1}{2n+1}} H_n(t)dt\right| \leq \frac{M_n}{2n+1}$. Sendo assim, para n suficientemente grande a soma $S_n(\frac{1}{2n+1})$ é aproximadamente igual a -0.08949. Tal difere substancialmente de $S_f(\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2n+1}$.

2 Aplicação a edp's

2.1 Equações diferenciais parciais a duas variáveis

Uma equação às derivadas parciais ou equação diferencial parcial (edp[8]) é uma equação envolvento d variáveis independentes e derivadas parciais de uma função $u\colon U \to \mathbb{R}$ onde $U \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto aberto e $d \geq 2$.

Nestas notas estaremos interessados apenas no caso de duas variáveis, i.e. $d = 2$. Frequentemente escolhemos x (posição) e t (tempo) como as duas variáveis independentes. A função $u\colon (x,t) \mapsto u(x,t)$ será então definida em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$. De forma a simplificar a escrita, utilizaremos frequentemente as seguintes notações:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{etc.}$$

Exemplo 4.

1. Equação de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
2. Equação do calor[9]: $u_{xx} = u_t$
3. Equação das ondas[10]: $u_{xx} = u_{tt}$
4. Equação de Schrödinger: $u_{xx} = -iu_t + V(x)u$, onde V é uma função potencial
5. Equação de Korteweg-de Vries (KdV): $u_{xxx} = u_t - uu_x$
6. Equação de transporte: $u_x = u_t$

Exercício 20. *Em finanças a equação de Black-Scholes em tempo τ contínuo modela o preço de opções V subjacentes a um derivado S que pode ser a cotação de uma determinada acção na bolsa:*

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right),$$

com σ, r constantes.

1. *Mostre que a equação de Black-Scholes reduz-se a:*

$$V_t = V_{xx} + (\mu - 1)V_x - \mu V, \qquad \mu = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

   Sugestão*: Use as transformações de variáveis $S = e^x$ e $\tau = -2t/\sigma^2$.*

2. *Mostre que o problema é equivalente ao da equação do calor (equação da difusão).*

   Sugestão*: Estude a função $u(x,t) = V(x,t)\exp\left[\frac{\mu-1}{2}x + \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 t\right]$.*

---

[8] Em inglês a sigla é *pde*.

[9] Esta edp foi originalmente estudada no problema de condução do calor numa barra. Porém, posteriormente a mesma equação surge na descrição de outros fenómenos de difusão e.g. físicos, biológicos ou mesmo económicos (cf. http://policy.iop.org/v_production/textonly/v4text.html).

[10] A equação das ondas modela uma série de fenómenos físicos (e.g. ondas numa superfície líquida, a propagação da luz). Aliás, toda a matéria é uma "mistura" de massa e onda. Fenómenos ondulatórios ou oscilatórios aparecem em quase todas as áreas do conhecimento como por exemplo demografia, *theoretical spatial economics*, engenharia, astronomia, modelos financeiros bolsistas, etc.

Exercício 21. *Na equação de Schrödinger (peça fundamental na teoria quântica das partículas) $|u(x,t)|^2 = u(x,t)\overline{u(x,t)}$ corresponde à densidade de probabilidade de encontrar uma partícula na posição $x \in \mathbb{R}$ no instante $t \geq 0$. Mostre que se a probabilidade está inicialmente normalizada, i.e. $\int_{\mathbb{R}} |u(x,0)|^2 dx = 1$, então temos $\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 dx = 1$ para todo $t \geq 0$.*

A ordem da edp corresponde à maior ordem das derivadas parciais. Uma edp diz-se linear se os termos dependentes de u são-no linearmente. E.g. a equação de Schrödinger pode-se escrever como

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x)\right] u(x,t) = 0$$

sendo linear em relação a u.

Os exemplos acima são lineares com excepção da KdV, transporte é de 1ª ordem, KdV de 3ª, os restantes de 2ª.

Resolver uma edp significa encontrar soluções para a função u, sendo para isso necessária alguma informação adicional. Os dados do problema poderão ser:

- valores iniciais $u(x,0)$, $u_x(x,0)$,
- valores fronteira $u(0,t)$, $u_x(0,t)$,
- $u(0,0)$ e $u_t(0,0)$, etc.

Cada caso define um problema diferente. Iremos estudar em detalhe alguns destes problemas para algumas das edp's apresentadas.

2.2 Equação do calor

Seja

$$\Omega =]0,1[\times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

2.2.1 Condições fronteira livres

Comecemos pelo seguinte problema de valores iniciais (pvi) para a função $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que verifique

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & \text{em } \Omega \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função dada que assumimos diferenciável por troços.

Observação 9. Definimos u no fecho $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ (a fronteira é denotada por $\partial\Omega$), mas as suas derivadas apenas poderão estar definidas no aberto Ω. I.e. a edp apenas pode ser resolvida num conjunto aberto.

Assumindo que uma solução existe para (2.2), vamos determinar a sua forma geral.

1. Visto que esperamos encontrar uma solução u que seja $C^2(\Omega)$, então u será igual à sua série de Fourier com respeito à primeira coordenada x em $]0,1[$:

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) e^{2\pi i k x}, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{2.3}$$

onde os coeficientes de Fourier são dependentes de t, i.e. $u_k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ dados por

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t) e^{-2\pi i k x} dx.$$

2. Assumimos agora que a regularidade de u é tal que é válida a derivação termo a termo da série. Podemos então reescrever a equação do calor da seguinte forma:

$$(2\pi ik)^2 u_k(t) = \frac{d}{dt}u_k(t), \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.4}$$

   Para cada $k \in \mathbb{Z}$ esta edo tem solução

$$u_k(t) = u_k(0)\,\mathrm{e}^{-(2\pi k)^2 t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

3. Como f é diferenciável por troços, pelo teorema de Fourier temos que nos pontos $x \in [0,1]$ de continuidade de f:

$$u(x,0) = f(x) = S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \mathrm{e}^{2\pi ikx}, \tag{2.5}$$

   onde f_k são os coeficientes de Fourier de f. Assim, $u_k(0) = f_k$.

4. Encontrámos uma candidata a solução

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \mathrm{e}^{-(2\pi k)^2 t}\mathrm{e}^{2\pi ikx} \tag{2.6}$$

   válida para $x \in]0,1[$ onde f é contínua.

O teorema seguinte demonstra que (2.6) é de facto uma solução de (2.2).

Teorema 2.1. *Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciável por troços. Então, u definida por* (2.6) *converge uniformemente em $\{(x,t) \in \overline{\Omega}\colon t \geq a\}$ com $a > 0$, é de classe $C^\infty(\Omega)$ e é solução do pvif* (2.2).

Observação 10.

- Apesar da condição inicial f para $t = 0$ ser apenas diferenciável por troços, a solução u é C^∞ para $t > 0$. O simples evoluir do sistema no tempo regulariza as funções envolvidas.
- Se também temos que $f \in C^0_{per}([0,1])$, então $f = S_f$ e $u \in C^0(\overline{\Omega})$.

Demonstração. A série em (2.6) converge uniformemente para $t \geq a$ pois

$$\sup_{t>a}\left| f_k \mathrm{e}^{-(2\pi k)^2 t}\mathrm{e}^{2\pi ikx}\right| \leq |f_k| e^{-(2\pi k)^2 a} \leq M e^{-(2\pi k)^2 a}$$

com $|f_k| \leq M$. A série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(2\pi k)^2 a}$ converge pois é majorada por um múltiplo de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-2\pi na} = \frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}.$$

Pela convergência uniforme e a Proposição 1.1 temos que u é contínua para $t > 0$.

Resta determinar a diferenciabilidade de u em Ω. Para isso, observe que para $\ell, m \in \mathbb{N}$ e $t \geq a$ existem constantes positivas C_1, C_2 tal que

$$\left|\frac{\partial^{\ell+m}}{\partial x^\ell \partial t^m}\left[f_k \mathrm{e}^{-(2\pi k)^2 t}\mathrm{e}^{2\pi ikx}\right]\right| \leq |f_k|\,(2\pi k)^{\ell+2m}\mathrm{e}^{-(2\pi k)^2 t} \leq C_1 M \mathrm{e}^{-C_2 k^2}.$$

Logo, a série das derivadas

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial^{\ell+m}}{\partial x^\ell \partial t^m}\left[b_n \mathrm{e}^{-(2\pi k)^2 t}\mathrm{e}^{2\pi i k x}\right]$$

converge uniformemente em $[a,b]\times[t_0,t_1]$ para quaisquer $0<a<b<1$ e $0<t_0<t_1$. Podemos assim usar a Proposição 1.3 que nos garante que $u\in C^\infty(\Omega)$.

Finalmente, é simples verificar que (2.6) satisfaz (2.2). □

Exercício 22. *Sendo u a solução do pvi da equação do calor com condições fronteira livres e f diferenciável por troços, calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.*

Teorema 2.2 (Princípio do máximo)**.** *Seja $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ e $T>0$. Se $u_{xx}\geq u_t$ em Ω, então*

$$M=\sup_{(x,t)\in\Omega, t\leq T} u(x,t)\leq \max_{(x,t)\in\partial\Omega, t\leq T} u(x,t)=m. \tag{2.7}$$

Demonstração. Seja $\Omega_T=]0,1[\times]0,T]$. Suponha $M>m$ e considere o ponto $(x_0,t_0)\in\Omega_T$ tal que $u(x_0,t_0)=M$. Defina a seguinte função $v\colon \overline{\Omega}_T\to\mathbb{R}$ dada por

$$v(x,t)=u(x,t)+\varepsilon(x-x_0)^2$$

onde $0<\varepsilon<M-m$. Logo, v tem máximo em algum $(x_1,t_1)\in\Omega_T$ pois $v(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)=M$ e

$$\max_{(x,t)\in\partial\Omega, t\leq T} v(x,t)\leq m+\varepsilon.1<M.$$

Para além disso, porque v tem máximo em $(x_1,t_1)\in\Omega_T$,

$$v_{xx}(x_1,t_1)\leq 0,\ v_t(x_1,t_1)=0 \quad\Rightarrow\quad (v_{xx}-v_t)(x_1,t_1)\leq 0. \tag{2.8}$$

Finalmente, temos que

$$0\geq(v_{xx}-v_t)(x,t)=(u_{xx}-u_t)(x,t)+2\varepsilon>(u_{xx}-u_t)(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega,$$

o que implica $u_{xx}<u_t$. □

Exercício 23. *Enuncie e demonstre o "princípio do mínimo".*

Exercício 24. *Mostre que a solução (2.10) é única para f contínua.*
Sugestão*: Use os princípios do máximo e do mínimo.*

2.2.2 Condições fronteira fixas

Considere agora o seguinte problema de valores iniciais e fronteira (pvif)[11]:

$$\begin{cases} u_{xx}=u_t, & \text{em } \Omega\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\in\mathbb{R}^+\\ u(x,0)=f(x), & x\in[0,1], \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ é uma função dada diferenciável por troços com $f(0)=f(1)=0$.

[11]Se u for a função temperatura medida no instante t em cada ponto x de uma barra, f corresponde à temperatura inicial da barra, cujos extremos estão à temperatura constante zero (por exemplo mergulhando os extremos em água gelada).

Observação 11.

- Note que podemos considerar problemas com $f(0) \neq u(0,t)$ e $f(1) \neq u(1,t)$. Porém, tal provoca dificuldades em relação à regularidade de u em $(0,t)$ e $(1,t)$.
- O caso geral $f(0) = \alpha$ e $f(1) = \beta$ é tratado no exercício 27.

Assumindo que uma solução u existe para (2.9), vamos determinar a sua forma geral. O procedimento é semelhante ao caso das condições livres. Apenas temos de garantir que a solução verifica a condição fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Nestas condições (ver Exercício 17) podemos escrever a série de Fourier de u relativamente à coordenada x como uma série de senos:

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t)\sin(\pi n x).$$

Para tal, começamos por fazê-lo para a condição inicial f. Como $f(0) = f(1) = 0$, em $[0,1]$ temos

$$S_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin(\pi n x), \quad b_n = 2(-1)^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi n x)\,dx.$$

Observação 12. Se f é ímpar, então a série de Fourier pode ser escrita como uma série de senos na forma $\sin(2\pi n x)$, i.e. não seria necessário considerar a extensão a outro intervalo.

Como para o caso das condições fronteira livres, a equação do calor implica que $u_n' = -(\pi n)^2 u_n$. Logo,

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{-(\pi n)^2 t} u_n(0) \quad \text{com} \quad u_n(0) = b_n.$$

O teorema seguinte demonstra que

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathrm{e}^{-(\pi n)^2 t}\sin(\pi n x) \tag{2.10}$$

é de facto a solução de (2.9).

Teorema 2.3. *Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciável por troços e tal que $f(0) = f(1) = 0$. Então, u definida por* (2.10) *converge uniformemente em $\{(x,t) \in \overline{\Omega} \colon t \geq a\}$ com $a > 0$, é de classe $C^\infty(\Omega)$ e é a única solução do pvif* (2.9).

Observação 13.

- Note que $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.
- Apesar da condição inicial f para $t = 0$ ser apenas diferenciável por troços, a solução u é C^∞ para $t > 0$. O simples evoluir do sistema no tempo regulariza as funções envolvidas.
- Se $f \in C^0_{per}([0,1])$, então $f = S_f$ e $u \in C^0(\overline{\Omega})$.

Exercício 25. *Demonstre o teorema acima de existência e unicidade da solução.*

Sugestão: Compare com a demonstração equivalente para o problema de fronteira livre.

Exercício 26. *Seja $\sigma > 0$ uma constante (condutividade térmica). Estude os pvif's seguintes:*

1.

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & em\ ]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

com $f(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

2.

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & em\ ]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u_x(0^+,t) = u_x(1^-,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & em\ ]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u_x(1^-,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

onde f *é diferenciável por troços e* $f(0) = 0 = f'(1^-)$.

Exercício 27. *Encontre uma solução do pvif:*

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & em\ ]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = \alpha, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(1,t) = \beta, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ *e* $f \in C^0_{per}([0,1])$ *é diferenciável por troços,* $f(0) = \alpha$ *e* $f(1) = \beta$.

Sugestão*: Considere a função* $w(x,t) = u(x,t) - \alpha - (\beta - \alpha)x$*, e escreva o seu pvif.*

2.3 Equação das ondas

A solução geral da equação das ondas pode ser obtida de uma forma simples. Basta para isso notar que:

- se $u \in C^2(\Omega)$ para um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, então a seguinte função v também é C^2,

$$v(\xi, \eta) = v(x+t, x-t) = u(x,t),$$

  onde $(\xi, \eta) = (x+t, x-t)$ é uma mudança de variáveis;

- se u verifica a equação das ondas $u_{xx} = u_{tt}$, então

$$v_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{xx} - u_{tt}) = 0;$$

- isto implica que
$$v(\xi,\eta) = \alpha(\xi) + \beta(\eta)$$
para algum par de funções α e β. Finalmente,
$$u(x,t) = \alpha(x+t) + \beta(x-t). \tag{2.11}$$

Observação 14. Através de uma transformação linear do tempo $\tau = t/c$, a equação das ondas escreve-se $u_{\tau\tau} = c^2 u_{xx}$. Isto corresponde a uma reparametrização do tempo envolvendo as propriedades do material de que é feito o meio onde as ondas se propagam (viz. a velocidade de propagação c).

2.3.1 Equação das ondas em $\mathbb{R}$

Queremos agora considerar
$$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$
e o pvi[12]
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & \text{em } \Omega \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0^+) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.12}$$
onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ são as condições iniciais.

Vamos usar a fórmula geral (2.11) para determinar uma candidata a solução do pvi (2.12). Usando as condições iniciais:
$$\begin{cases} \alpha(x) + \beta(x) = f(x) \\ \alpha'(x) - \beta'(x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x) + \beta(x) = f(x) \\ \alpha(x) - \beta(x) = \int_0^x g(s)ds + K, \end{cases}$$
onde K é uma constante. Resolvendo o sistema acima, obtemos as funções α e β:
$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds \tag{2.13}$$
conhecida como **solução de D'Alembert**.

Teorema 2.1 (D'Alembert)**.** *Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, então a solução de D'Alembert* (2.13) *é solução do pvi* (2.12) *e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Exercício 28. *Prove o Teorema 2.1.*

Exercício 29. *Usando* (2.11) *mostre que a solução de D'Alembert é a única solução do pvi* (2.12)*.*

[12] Este caso corresponde a uma corda infinita (e.g. propagação de ondas unidimensionais numa fibra óptica ou num canal suficientemente grandes para que os efeitos dos extremos sejam desprezáveis).

2.3.2 Equação das ondas em $[0,1]$

Considerando

$$\Omega =]0,1[\times\mathbb{R}^+,$$

queremos determinar as soluções do seguinte pvif[13]

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & \text{em } \Omega \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1] \\ u_t(x,0^+) = g(x), & x \in [0,1], \end{cases} \tag{2.14}$$

onde f e g são funções $[0,1] \to \mathbb{R}$ dadas.

Estamos à procura de soluções que sejam contínuas em $\overline{\Omega}$ e que tenham segundas derivadas em Ω. Para que isso aconteça iremos assumir alguma regularidade para as condições fronteira f e g. Por enquanto consideramos apenas que $f \in C^2([0,1])$ e $g \in C^1([0,1])$ tais que

$$f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0.$$

Logo, escrevemos as respectivas séries de Fourier como séries de senos:

$$u(x,0) = f(x) = S_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \sin(\pi n x) \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = g(x) = S_g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \sin(\pi n x), \tag{2.15}$$

onde

$$f_n = 2(-1)^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi n x)\,dx, \quad g_n = 2(-1)^n \int_0^1 g(x)\sin(\pi n x)\,dx.$$

Exercício 30. *Sejam $f \in C^2([0,1])$ e $g \in C^1([0,1])$ tais que $f''', g'' \in L^2([0,1])$,*

$$f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0, \qquad f''(0) = f''(1) \quad \text{e} \quad g''(0) = g''(1).$$

Mostre que existe $C > 0$ tal que

$$|f_n| \leq C\frac{|f_n'''|}{n^3} \quad \text{e} \quad |g_n| \leq C\frac{|g_n''|}{n^2},$$

onde f_n''' e g_n'' são os coeficientes de Fourier de f''' e g'', respectivamente.

Sugestão*: Escreva os coeficientes de Fourier para as extensões ímpares de f e g, usando integração por partes.*

Pelas condições fronteira, procedendo como na secção 2.2, tomamos u na forma de série de Fourier em relação à variável x:

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t)\sin(\pi n x), \qquad (x,t) \in \Omega.$$

Podemos extender esta série aos pontos $t = 0$ tendo em conta as condições iniciais (2.15), determinando $u_n(0) = f_n$ e $u_n'(0^+) = g_n$.

[13] A função u pode representar a posição vertical de uma corda (e.g. de uma guitarra ou piano) na posição x e instante t. Então f é o deslocamento inicial dessa corda (no momento em que se solta) cujos extremos estão fixos (nos "pentes" da guitarra). Além disso, g será a velocidade inicial (o modo como a corda é dedilhada ou martelada).

Supondo que u é suficientemente regular, podemos diferenciar a série de Fourier termo a termo. Logo, do pvif (2.14) obtemos

$$(\pi i n)^2 u_n(t) = u_n''(t), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.16}$$

que representa para cada n uma edo linear de 2ª ordem. Esta edo pode ser escrita na forma matricial:

$$U_n' = A_n U_n, \tag{2.17}$$

onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -(\pi n)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_n = \begin{bmatrix} u_n' \\ u_n \end{bmatrix}.$$

A solução de (2.17) é

$$U_n(t) = \mathrm{e}^{tA_n} U_n(0)$$

onde $U_n(0)$ já é conhecido, faltando calcular a exponencial da matriz tA_n. Para isso determinamos os valores próprios λ_n de A_n e os respectivos vectores próprios $v_n \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$:

$$\lambda_n = \pm \pi i n \quad \text{e} \quad v_n = (\pm \pi i n, 1).$$

Podemos então diagonalizar A_k para $k \neq 0$ na forma

$$A_n = S \begin{bmatrix} \pi i n & 0 \\ 0 & -\pi i n \end{bmatrix} S^{-1}, \quad \text{onde} \quad S = \begin{bmatrix} \pi i n & -\pi i n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA_n} &= S \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\pi i n t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\pi i n t} \end{bmatrix} S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi n t) & -\pi n \sin(\pi n t) \\ \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n t) & \cos(\pi n t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$u_n(t) = u_n'(0) \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n t) + u_n(0) \cos(\pi n t). \tag{2.18}$$

Assim,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{g_n}{\pi n} \sin(\pi n t) + f_n \cos(\pi n t) \right] \sin(\pi n x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} - \left(\frac{g_n}{4\pi n} + \frac{i f_n}{4} \right) \mathrm{e}^{\pi i n (x+t)} - \left(\frac{g_n}{4\pi n} - \frac{i f_n}{4} \right) \mathrm{e}^{-\pi i n (x+t)} + \\ &\quad + \left(\frac{g_n}{4\pi n} - \frac{i f_n}{4} \right) \mathrm{e}^{\pi i n (x-t)} + \left(\frac{g_n}{4\pi n} + \frac{i f_n}{4} \right) \mathrm{e}^{-\pi i n (x-t)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Repare na forma da solução geral das ondas: $u(x,t) = \alpha(x+t) + \beta(x-t)$. A função acima é a candidata a solução do pvif.

Teorema 2.4. *Sejam $f \in C^2([0,1])$ e $g \in C^1([0,1])$ tais que $f''', g'' \in L^2([0,1])$,*

$$f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0, \qquad f''(0) = f''(1) \quad e \quad g''(0) = g''(1).$$

Então, u definida por (2.19) converge uniformemente em $\overline{\Omega}$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e é solução do pvif (2.14).

Demonstração. Pelo facto de f e g serem ambas de classe C^1, temos que as suas séries de Fourier convergem absoluta e uniformemente. A série em (2.19) converge uniformemente pois os seus termos são majorados por $|g_n| + |f_n|$ cuja série é convergente. Logo u é C^0 em $\overline{\Omega}$.

Usando os resultados do Exercício 30,

$$n^2|f_n| \leq \frac{|f_n'''|}{n} \leq |f_n'''|^2 + \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad n|g_n| \leq \frac{|g_n''|}{n} \leq |g_n''|^2 + \frac{1}{n^2}$$

e a desigualdade de Bessel para f''' e g'', temos que

$$\sum n^2|f_n| < \infty \quad \text{e} \quad \sum n|g_n| < \infty.$$

Isto implica que a série cujos termos são o módulo da primeira derivada dos termos de u:

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{g_n}{\pi n}\sin(\pi n x)\sin(\pi n t) + f_n \sin(\pi n x)\cos(\pi n t)\right]\right| \leq |g_n| + \pi n|f_n|,$$

onde $s = x$ ou t, converge uniformemente. O que significa, pela Proposição 1.3, que $u \in C^1(\Omega)$.

A mesma ideia pode ser aplicada para a segunda derivada. De facto,

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial s \partial r}\left[\frac{g_n}{\pi n}\sin(\pi n x)\sin(\pi n t) + f_n \sin(\pi n x)\cos(\pi n t)\right]\right| \leq \pi n|g_n| + (\pi n)^2|f_n|,$$

onde $s, r = x$ ou t, converge uniformemente. Logo $u \in C^2(\Omega)$.

Finalmente, é simples verificar que u verifica (2.14). $\square$

Observação 15. Note que a solução (2.19) pode ser escrita na forma $u(x,t) = \alpha(x+t) + \beta(x-t)$.

Teorema 2.5 (Unicidade de solução)**.** *A solução do pvif* (2.14) *dada pelo Teorema 2.4 é única.*

Demonstração. Suponha que temos duas soluções u_1 e u_2. Então $u = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução do seguinte pvif:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & \text{em } \Omega \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,1] \\ u_t(x,0^+) = 0, & x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.20}$$

Queremos então provar que $u = 0$ em $\overline{\Omega}$.

Observe que temos as seguintes igualdades:

$$\int_0^1 u_{xx}u_t dx = [u_x u_t]_0^1 - \int_0^1 u_x u_{tx} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (u_x^2)_t dx$$
$$\int_0^1 u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2)_t dx.$$

Como $u_{xx} = u_{tt}$, as duas expressões acima são iguais, i.e.

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (u_x^2 + u_t^2) dx = 0.$$

Temos então que a função "energia" é constante:

$$E(t) = \int_0^1 (u_x^2 + u_t^2)(x,t)dx.$$

Em particular, por termos $u(x,0) = 0$ logo $u_x(x,0) = 0$,

$$E(0) = \int_0^1 (u_x^2 + u_t^2)(x,0)dx = 0.$$

Assim,

$$E(t) = \int_0^1 (u_x^2 + u_t^2)(x,t)dx = E(0) = 0$$

e $u_t = u_x = 0$ em Ω. Ou seja, u é constante em Ω. Como u é contínua em $\overline{\Omega}$, pelas condições fronteira obtemos $u = 0$. $\square$

Exercício 31. *Sejam $c, \mu > 0$. Resolva o problema:*

$$\begin{cases} cu_{xx} = u_{tt} + 2\mu u_t, & \text{em }]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1] \\ u_t(x,0^+) = g(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

onde $f \in C^2$ e $g \in C^1$.

2.4 Equação de Laplace

A equação de Laplace para uma função $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é a equação diferencial parcial

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Esta pode ser reescrita como $\Delta u = 0$, $\nabla^2 u = 0$ ou $\operatorname{tr}(D^2u) = 0$, onde $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é o chamado operador laplaciano. As soluções da equação de Laplace são conhecidas como funções harmónicas. Recorde que se uma função complexa na forma $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica então u e v são harmónicas.

Neste contexto pretendemos solucionar o **problema de Dirichlet**, i.e. o problema de encontrar uma função harmónica numa região Ω tal que na fronteira $\partial\Omega$ seja igual a uma função dada. Simbolicamente, pretendemos determinar $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

onde $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é a condição fronteira.

Para uma região arbitrária este problema é de difícil resolução. Iremo-nos restringir a casos onde o método de Fourier se pode aplicar.

2.4.1 Problema de Dirichlet num rectângulo

Considere

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[.$$

Iremos estudar o seguinte pvf (problema de Dirichlet):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{em } \Omega \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(x,1) = 0, & x \in [0,1] \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & y \in [0,1], \end{cases} \tag{2.21}$$

onde $f \in C^3([0,1])$ com $f(0) = f(1) = 0$.

Seguiremos o procedimento das secções anteriores. Assumimos que u é dada pela sua série de Fourier em relação à coordenada x. Como $u(0,y) = u(1,y) = 0$,

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(y)\sin(\pi n x), \qquad (x,y) \in \Omega.$$

Extendendo esta série aos pontos $y = 0$ e $y = 1$, usamos as condições fronteira

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \sin(\pi n x), \quad f_n = 2(-1)^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi n x)\,dx,$$

para obter $u_n(0) = f_n$ e $u_n(1) = 0$.

Se u é suficientemente diferenciável, a equação de Laplace implica que

$$(\pi i n)^2 u_n(y) + u_n''(y) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad y \in [0,1].$$

Para cada n temos uma edo linear de 2ª ordem (diferente da obtida em (2.16) para a equação das ondas).

A solução para pode ser determinada usando a representação matricial:

$$U_n' = A_n U_n, \tag{2.22}$$

onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & (\pi n)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_n = \begin{bmatrix} u_n' \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de A_n são $\pm\pi n$, obtemos a solução de (2.22) dada por:

$$U_n(y) = \begin{bmatrix} u_n'(y) \\ u_n(y) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} e^{\pi n y} & 0 \\ 0 & e^{-\pi n y} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Como

$$S = \begin{bmatrix} \pi n & -\pi n \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

chegamos à solução geral,

$$u_n(y) = \frac{u_n'(0)}{\pi n}\sinh(\pi n y) + u_n(0)\cosh(\pi n y).$$

Usando $u_n(1) = 0$, temos que

$$u'_n(0) = -\pi n u_n(0) \coth(\pi n).$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} -u_n(0) \left[\coth(\pi n)\sinh(\pi n y) - \cosh(\pi n y)\right] \sin(\pi n x) \\ &= -\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \frac{\sinh(\pi n(y-1))}{\cosh(\pi n)} \sin(\pi n x). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Teorema 2.6. *Seja $f \in C^3([0,1])$ tal que $f(0) = f(1) = 0$. Então, u definida por* (2.23) *converge uniformemente em $\overline{\Omega}$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e é solução do problema de Dirichlet* (2.21)*.*

Exercício 32. *Prove o Teorema 2.6.*

Exercício 33. *Mostre que a solução obtida acima é única.*
Sugestão*: Recorde o princípio do máximo (Teorema* (2.2)*).*

Agradecimentos

Agradeço às turmas 3º ano MAEG 2005/06 e 2006/07, em particular a Paulo Lopes, Marisa Morais, Mariana Santos, Liliana Cardoso e Pedro Gonçalves, pela ajuda na correcção de versões anteriores deste texto.

Referências

[1] D. Figueiredo *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides, IMPA, 1977.

[2] R. Iório Jr. e V. de Magalhães Iório. *Equações diferenciais parciais: uma introdução.* Projecto Euclides, IMPA, 1988.

[3] A. Vretblad. *Fourier analysis and its applications.* Graduate texts in Mathematics 223, Springer, 2003.