Introdução à integração em $\mathbb{R}^n$

João Lopes Dias
Departamento de Matemática, ISEG
Universidade de Lisboa
Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal

10 de Setembro de 2020

Prefácio

O cálculo integral iniciou-se com Newton e Leibniz no século XVII e desde então tem tido muitas aplicações e desenvolvimentos. A definição rigorosa do integral por Riemann no século XIX e, já no início do século XX, a construção de um integral mais geral e com melhores propriedades por Lebesgue, constituem as contribuições mais importantes para a teoria de integração. Juntamente com o cálculo diferencial, o cálculo integral faz hoje parte do curriculum de qualquer estudante universitário em ciência, economia e engenharia. Neste livro iremos introduzir o leitor à integração em $\mathbb{R}^n$ nalgumas das suas vertentes mais relevantes para as aplicações.

No primeiro capítulo estudamos variedades diferenciais em $\mathbb{R}^n$ como generalizações de curvas em $\mathbb{R}^2$ e de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Uma variedade diferencial é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que se assemelha localmente a $\mathbb{R}^m$, com $m \leq n$, através de um sistema de coordenadas. Esta semelhança irá ser explorada de forma a lidarmos com conjuntos complicados, não lineares e com dimensões inferiores à do espaço ambiente. Como aplicação iremos encontrar extremos de funções quando restringidas a variedades.

No capítulo 2 iniciamos o estudo da integração em $\mathbb{R}^n$ com o integral de Riemann em intervalos de $\mathbb{R}^n$. Iremos ver que o cálculo do integral em $\mathbb{R}^n$ pode ser reduzido ao integral em $\mathbb{R}$ usando o teorema de Fubini. Os sistemas de coordenadas utilizados no primeiro capítulo serão úteis para calcular integrais por transformação de coordenadas. De forma semelhante, no capítulo 3 integraremos funções em variedades diferenciais. O teorema fundamental do cálculo integral em $\mathbb{R}$ tem aqui várias consequências que iremos descrever.

A segunda parte deste livro, correspondendo aos três últimos capítulos, é dedicada à teoria da medida e à integração de Lebesgue. No capítulo 4 descrevemos as propriedades fundamentais das medidas, e no capítulo seguinte definimos a classe das funções que vamos integrar. Finalmente, no capítulo 6 apresentamos o integral de Lebesgue e deduzimos as suas propriedades principais. Este integral tem um papel central em várias áreas, em particular na teoria das probabilidades e processos estocásticos.

O presente texto resultou das notas preparadas para a cadeira Análise Matemática III do segundo ano da licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão do ISEG, Universidade de Lisboa. Para segui-lo são necessários conhecimentos de álgebra linear, de cálculo integral em $\mathbb{R}$ e de cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$, temas habitualmente desenvolvidos no primeiro ano de licenciatura. Em particular, assume-se que o leitor sabe primitivar e integrar funções reais de variável real, manipular matrizes e calcular derivadas de funções vectoriais.

Como acredito que só aprendemos matemática resolvendo problemas, incluo bastantes exercícios ao longo do texto. Para além disso, o final deste livro contém uma lista de exercícios pensados para testar os conhecimentos adquiridos. Uso o símbolo * para indicar os exercícios de maior grau de dificuldade. Para resolver alguns desses poderá ser necessário efectuar-se pesquisa bibliográfica. Estes exercícios são apropriados para o leitor muito motivado, que quer ir para além do âmbito deste livro.

Agradeço às turmas do segundo ano do MAEG 2009/10, 2010/11, 2011/12, 2012/13 e 2013/14, em particular à Patrícia Silva, à Alexandra Mina, à Inês Marques e ao Paulo Pedro, pela ajuda na detecção de gralhas em versões anteriores deste texto.

Ao longo do texto utilizo a notação matemática que se encontra frequentemente na literatura, pelo que assumo que o leitor a conhece. Em particular, recordo que uma função é C^0 se for contínua e C^k, com $k \geq 1$ inteiro, se a sua k-ésima derivada for contínua. Também usaremos as seguintes simplificações de escrita:

- sse (se e só se)
- i.e. (isto é, do latim *id est*)
- e.g. (por exemplo, do latim *exempli gratia*)

Lisboa, 26 Junho 2014

À Joaninha

Conteúdo

Capítulo 1

Variedades diferenciais

Variedades diferenciais são conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que se assemelham a $\mathbb{R}^m$ com $m \leq n$ quando os observamos localmente, i.e. numa vizinhança suficientemente pequena de qualquer dos seus pontos. Por exemplo, para nós humanos, muito pequenos relativamente ao nosso planeta, a superfície da Terra parece-nos plana como $\mathbb{R}^2$. No entanto, vista do espaço, tem a forma próxima de uma esfera. São diversas as consequências do facto de localmente a Terra ser aproximadamente um plano. Em particular, podemos desenhar mapas de regiões do globo, a que chamaremos sistemas de coordenadas locais ou parametrizações. Note que para desenhar um mapa de todo o planeta é sempre necessário fazer um corte[1]. Esta é a diferença entre uma variedade, a superfície terrestre, e o plano $\mathbb{R}^2$.

1.1 Sistemas de coordenadas locais

Sejam M um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ não vazio e $1 \leq m \leq n$ inteiros. Um **sistema de coordenadas locais ou m-parametrização em torno de** $p \in M$ é uma função C^1

$$\phi \colon V \to U$$

com uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de p e um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ tais que:

1. $\phi(V) = M \cap U$,

2. ϕ é invertível com inversa $\phi^{-1} \colon \phi(V) \to V$ contínua,

[1]Em geral, nos mapas feitos na Europa o corte é feito entre o Pólo Norte e o Pólo Sul pelo Oceano Pacífico. Também se pode cortar pelo Oceano Atlântico, como em mapas originários da Austrália.

3. para qualquer $y \in V$, a característica (*rank*) da derivada $D\phi(y)$ é igual a m,

$$\operatorname{rank} D\phi(y) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} = m$$

(isto significa que as colunas de $D\phi(y)$ são linearmente independentes).

Os seguintes exemplos de sistemas de coordenadas (e variações destes) serão de grande utilidade prática.

1.1.1 Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$

Sejam $m = n = 2$ e $M = \mathbb{R}^2$. Considere a transformação $\phi \in C^\infty$ definida em

$$V = \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$$

por

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Escrevendo as componentes de ϕ como $\phi(r, \theta) = (x, y)$, temos que ϕ^{-1} existe em

$$U = \phi(V) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \colon x \geq 0, y = 0\}$$

dada por

$$(r, \theta) = \phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \Theta(x, y)),$$

onde

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0, y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Finalmente,

$$D\phi(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

tem característica (rank) igual a 2.

Obtivemos assim uma 2-parametrização C^∞ em torno de qualquer ponto em U. Para tratarmos outros pontos em M basta usar outro V apropriado, nomeadamente considerando outro intervalo para θ contendo 0.

Exercício 1.1.1. * Estude as coordenadas $x = r\sinh t$, $y = r\cosh t$, onde o seno hiperbólico é dado por

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

e o coseno hiperbólico é

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

1.1.2 Coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$

Sejam $m = n = 3$ e $M = \mathbb{R}^3$. Considere a transformação $\phi \in C^\infty$ definida em

$$V = \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$

por

$$\phi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Note que no plano xy a transformação de coordenadas ϕ corresponde às coordenadas polares. Finalmente,

$$D\phi(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 3.

Obtivemos assim uma 3-parametrização C^∞ em torno de qualquer ponto em U. Para tratarmos outros pontos em M basta usar outro V apropriado, nomeadamente considerando outro intervalo para θ contendo 0.

1.1.3 Coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$

Sejam $m = n = 3$ e $M = \mathbb{R}^3$. Considere a transformação $\phi \in C^\infty$ definida em

$$V = \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

por

$$\phi(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta\, \cos\varphi, r\sin\theta\, \cos\varphi, r\sin\varphi).$$

A inversa existe em

$$U = \phi(V) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \colon x \geq 0, y = 0\}$$

dada por

$$(r, \theta, \varphi) = \phi^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \Theta(x, y), \Theta(\sqrt{x^2 + y^2}, z)).$$

Assim,

$$D\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta\,\cos\varphi & -r\sin\theta\,\cos\varphi & -r\cos\theta\,\sin\varphi \\ \sin\theta\,\cos\varphi & r\cos\theta\,\cos\varphi & -r\sin\theta\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

tem característica (rank) igual a 3.

Parametrizações de pontos em $M \setminus U$ são semelhantes, sendo apenas necessário tomar outros intervalos para os ângulos θ e φ.

Exercício 1.1.2. Esboce detalhadamente os seguintes conjuntos:

1. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 1,\, x^2 < y < 2x^2\}$.
2. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < y < 1,\, -\sqrt{1-y^2} < x < 2y^2 - 1\}$.
3. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\, x^2/2 < y < x^2,\, 0 < z < x^2\}$.
4. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\, 0 < y < 1-x,\, 0 < z < x+y\}$.
5. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2/4 < 1\}$.
6. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < z^2 + 1\}$.

1.2 Variedades diferenciais

Seja $1 \leq m \leq n$. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferencial** de dimensão m (ou m-variedade) sse existe uma m-parametrização em torno de cada $p \in M$.

Observação 1.2.1. M é uma n-variedade sse M é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Neste caso, a parametrização é a função identidade.

Observação 1.2.2. Note que existem muitas parametrizações possíveis em torno de um ponto.

Considere uma m-variedade M, $p \in M$ e φ uma m-parametrização em torno de p. O espaço vectorial imagem de $D\phi(a)$ com $a = \phi^{-1}(p)$, tem dimensão m e é chamado **espaço tangente a** M **em** p denotado por T_pM. Note que este espaço é gerado pelas m colunas linearmente independentes da matriz $D\phi(a)$, i.e.

$$T_pM = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(a), \dots \frac{\partial\phi}{\partial x_m}(a) \right\}.$$

O espaço vectorial ortogonal a T_pM é o **espaço normal a** M **em** p denotado por $T_pM^\perp$. Os elementos de $T_pM^\perp$ são os vectores normais a M em p. Temos assim

$$T_pM^\perp \oplus T_pM = \mathbb{R}^n$$

e $\dim T_pM^\perp = n - m$.

1.2.1 Exemplos de curvas

Chamam-se curvas a 1-variedades.

1. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$. Se $p \in S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ consideremos a parametrização adaptada das coordenadas polares
$$\phi(t) = (\cos t, \sin t)$$
com $t \in V =]0, 2\pi[$ e $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$. É simples verificar que ϕ é C^1, invertível com inversa contínua e a característica de $D\phi$ em V é igual a 1. Por exemplo, o espaço tangente em $(0, 1) = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2))$ é gerado pelo vector $(-1, 0)$. Este espaço corresponde à recta tangente à circunferência em $(0, 1)$ (esboce a figura) O espaço normal é gerado por $(0, 1)$, que é a recta ortogonal ao espaço tangente em p. Finalmente, se $p = (1, 0)$, podemos considerar a mesma transformação ϕ, mas agora $V =] - \pi/2, \pi/2[$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Logo, a circunferência é uma 1-variedade.

2. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ considere a parametrização $\phi(t) = u+t(v-u)$, $t \in]0, 1[$ do segmento de recta que une u a v.

Exercício 1.2.3.

1. Calcule os espaços tangente e normal e esboce as curvas parametrizadas por:

   (a) $\phi(t) = (2 - t)(1, 1) + (t - 1)(2, 0), t \in]1, 2[$.

   (b) $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in]0, 4\pi[$.

2. Descreva parametricamente cada uma das seguintes curvas:

   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4\}$.

   (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2/4 = 1\}$.

   (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 3\}$.

   (d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 1/2\}$.

1.2.2 Exemplos de superfícies

Uma superfície é uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.

1. Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a superfície da esfera de raio 1 centrada na origem. Se $p \in S^2 \setminus \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$, baseados nas coordenadas esféricas escolhemos
$$\phi(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi)$$

com $(\theta,\varphi)\in V=]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$ e $U=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,1)\}$. É simples verificar que ϕ é C^1, invertível com inversa contínua e a característica de $D\phi$ em V é igual a 2. Por exemplo, o espaço tangente em $(0,1,0)$ dado por $(\theta,\varphi)=(\pi/2,0)$, é gerado pelos vectores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ correspondendo ao plano tangente à superfície da esfera em $(0,1,0)$ (esboce a figura).

Usando a mesma ideia para os restantes pontos demonstramos que S^2 é uma 2-variedade.

2. A superfície de um toro é dada por

$$T^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ \left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2\right\},$$

onde $0<r<R$ são fixos.

Uma transformação de coordenadas apropriada é

$$\phi(\theta,\varphi)=((R+r\cos\varphi)\cos\theta,(R+r\cos\varphi)\sin\theta,r\sin\varphi)$$

com $(\theta,\varphi)\in V=]0,2\pi[\times]0,2\pi[$. É simples verificar que ϕ é C^1, invertível com inversa contínua em $\phi(V)$ e a característica de $D\phi$ em V é igual a 2. O conjunto $\phi(V)$ não inclui os pontos que correspondem a $\theta=0$ ou $\varphi=0$. Parametrizações em torno destes pontos podem ser obtidos escolhendo outro V. Desta forma T^2 é uma 2-variedade.

Exercício 1.2.4.

1. Mostre que o cilindro infinito $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=1\}$ é uma 2-variedade.

2. Descreva parametricamente e determine a dimensão de cada uma das seguintes variedades:

   (a) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=1,\ y>|x|,\ |z|<2\}$.
   (b) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon (\sqrt{x^2+y^2}-4)^2+z^2=1\}$.
   (c) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2/4+z^2/9=3\}$.

3. *Descreva T^2 usando coordenadas cilíndricas.

1.3 Representação implícita

Nesta secção queremos encontrar definições equivalentes de variedades, que nos irão permitir construir mais exemplos de uma forma simplificada. Vamos ver que uma variedade corresponde localmente ao gráfico de uma função e aos zeros de uma outra função relacionada.

1.3.1 Gráfico de uma função

Dada uma função $f\colon W \to \mathbb{R}^{n-m}$ definida num conjunto $W \subset \mathbb{R}^m$, o **gráfico de f em W** é o conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \colon x \in W\}.$$

Provamos primeiro que o gráfico de uma função C^1 é uma variedade.

Proposição 1.3.1. *Seja $W \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f \in C^1(W, \mathbb{R}^{n-m})$. Então G_f é uma m-variedade.*

Demonstração. Seja $\phi\colon W \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(x) = (x, f(x))$. Logo, $\phi \in C^k$, $\phi(W) = G_f$, $\operatorname{rank} D\phi(x) = m$ e $\phi^{-1}(x, y) = x$ é C^0. Logo, ϕ é uma parametrização local e G_f é uma m-variedade. □

O próximo teorema indica que uma variedade é localmente o gráfico de uma função.

Teorema 1.3.2. *Seja $1 \le m < n$. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma m-variedade sse dado $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de p, um aberto $W \subset \mathbb{R}^m$ e uma função $f \in C^1(W, \mathbb{R}^{n-m})$ tais que*

$$M \cap U = G_f.$$

Demonstração.

($\Leftarrow$) Proposição 1.3.1.

($\Rightarrow$) Considere uma m-parametrização $\phi\colon \widetilde{V} \to \widetilde{U}$ de M em torno de um ponto p com $\phi(0) = p$ e $M \cap \widetilde{U} = \phi(\widetilde{V})$. Como $\operatorname{rank} D\phi(t) = m$, reordenamos as componentes $\phi(t) = (x, y)$ de forma a $x = \phi_1(t) \in \mathbb{R}^m$ e $\det D\phi_1(t) \neq 0$. As restantes coordenadas são $y = \phi_2(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Pelo teorema da função inversa (ver Anexo A.1), ϕ é invertível numa vizinhança de 0, $V \subset \widetilde{V}$, i.e. existe a inversa ϕ_1^{-1} de classe C^1 dada por $t = \phi_1^{-1}(x)$ numa vizinhança de $\phi_1(0)$.

Seja $f(x) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x)$ com $x \in W = \phi_1(V)$. O gráfico desta função C^1 em W é dado pelos pontos $(x, f(x)) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ com $t \in V$. Ou seja, o gráfico é igual a $M \cap U$ onde $U \subset \widetilde{U}$ é uma vizinhança de p.

□

Exercício 1.3.3. *Calcule o espaço tangente e o espaço normal num ponto do gráfico de uma função $f \in C^1(W, \mathbb{R}^{n-m})$ com $W \subset \mathbb{R}^m$ aberto.

1.3.2 Conjunto de nível

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $F\colon S \to \mathbb{R}^{n-m}$ com $m < n$. Um **conjunto de nível de** F é a pré-imagem de um valor no contradomínio de F. Ou seja, se $c \in F(S)$, então

$$F^{-1}(c) = \{x \in S\colon F(x) = c\}$$

é um conjunto de nível[2].

Teorema 1.3.4 (teorema da função implícita)**.** *Seja* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$*. Se* $(x_0, y_0) \in F^{-1}(c)$ *e* $\det \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$*, então existe uma função* $f \in C^k(U, V)$ *definida numa vizinhança* $U \subset \mathbb{R}^{n-m}$ *de* x_0 *com valores numa vizinhança* $V \subset \mathbb{R}^m$ *de* y_0*, tais que*

$$F^{-1}(c) \cap (U \times V) = G_f.$$

Exercício 1.3.5. Demonstre o teorema anterior baseando-se no Teorema A.1.1 do Anexo A.1.

Um ponto $p \in S$ é ponto regular de F sse $\operatorname{rank} DF(p) = n-m$. Um ponto crítico de F é um ponto não regular. Se o conjunto de nível de $c \in F(S)$ contém um ponto crítico, então é um valor crítico de F. Caso contrário, se $F^{-1}(c)$ apenas contém pontos regulares, c é um **valor regular**.

Exercício 1.3.6. Seja $F(x, y, z) = x^2+y^2-z^2$ com $DF(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$. O $\operatorname{rank} DF(x, y, z)$ é igual a 1 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e a zero na origem. Logo $(0, 0, 0)$ é um ponto crítico com valor crítico 0. Os restantes pontos são regulares, e $F(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é o conjunto dos valores regulares.

Vamos agora ver que os conjuntos de nível para valores regulares são variedades.

Proposição 1.3.7. *Se* c *um valor regular de* F*, então* $F^{-1}(c)$ *é uma* m*-variedade.*

Demonstração. Escrevendo $p = (x_0, y_0) \in F^{-1}(c)$ onde $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $y_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, temos $F(x_0, y_0) = c$ e $\operatorname{rank} DF(x_0, y_0) = n - m$. Note que podemos escolher a ordem das coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que as $n - m$ colunas linearmente independentes de $DF(x_0, y_0)$ sejam as últimas, correspondendo à coordenada y. Isto é, temos $\det \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, o conjunto de nível é localmente o gráfico de uma função C^1. Pelo Teorema 1.3.2 é uma m-variedade. □

Mostramos agora que o gráfico de uma função é o conjunto de nível de um valor regular.

[2] A notação mais rigorosa para conjunto de nível deveria ser $F^{-1}(\{c\})$. No entanto, de forma a simplificar a escrita, iremos usar $F^{-1}(c)$.

Proposição 1.3.8. *Seja $W \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f \in C^1(W, \mathbb{R}^{n-m})$. Então existe $F \in C^1(W \times f(W), \mathbb{R}^{n-m})$ tal que $G_f = F^{-1}(0)$ e 0 é um valor regular de F.*

Demonstração. Seja $F(x, y) = y - f(x)$ com $x \in W$ e $y \in f(W)$. Temos assim que $F(x, y) = 0$ é equivalente a $y = f(x)$ que corresponde aos pontos no gráfico de f. Finalmente, é fácil verificar que $\operatorname{rank} DF(x) = n - m$. □

O teorema seguinte permite representar localmente variedades diferenciais como o conjunto de nível de uma função. Serve assim como critério simples e útil para a identificação e construção de variedades.

Teorema 1.3.9 (Representação implícita)**.** *Seja $1 \leq m < n$. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma m-variedade sse dado $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de p e uma função $F \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-m})$ tais que*

- *$M \cap U = \{x \in U \colon F(x) = 0\}$,*
- *0 é um valor regular de F (i.e. $\operatorname{rank} DF(x) = n - m$, $x \in M \cap U$).*

Demonstração.

($\Leftarrow$) Proposição 1.3.7.

($\Rightarrow$) Usando o Teorema 1.3.2, para cada $p \in M$ temos uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ e um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, sendo $M \cap U$ o gráfico de uma função f. Basta agora utilizar a Proposição 1.3.8.

□

Exemplo 1.3.10. Considere o duplo cone $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2\}$. Seja $U = \mathbb{R}^3$ e $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Temos então $DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$ e

$$\operatorname{rank} DF(x, y, z) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Então, apenas $(0, 0, 0)$ é um ponto crítico. Ou seja, $M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é uma 2-variedade.

Exemplo 1.3.11. A hipérbole $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\}$ é uma 1-variedade pois $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ é C^1 com valor regular 0.

Exemplo 1.3.12. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2/2 = 1,\, y - z = -1\}$. Consideremos $F(x, y, z) = (x^2 + y^2/2 - 1, y - z + 1)$. Como $\operatorname{rank} DF(x, y, z) = 2$, M é uma 1-variedade.

1.3.3 Espaços tangente e normal

Podemos ainda determinar os espaços tangente e normal a uma variedade num ponto usando a representação implícita.

Recorde que uma função escalar f é uma função com valores em $\mathbb{R}$, e que o vector gradiente de f denotado por ∇f é simplesmente a derivada de f.

Teorema 1.3.13. *Considere a representação implícita de uma m-variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ em torno de um ponto $p \in M$ dada por uma função $F \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-m})$ para um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então,*

$$T_pM = \ker DF(p) \quad e \quad T_pM^\perp = \operatorname{span}\{\nabla F_1(p), \dots, \nabla F_{n-m}(p)\}$$

onde $\nabla F_i(p)$ são as linhas de $DF(p)$.

Demonstração. Considere uma parametrização de M em redor de p dada por $\phi\colon V \to M \cap U$ com $\phi(0) = p$. Como para qualquer $t \in V$ temos que $\phi(t) \in F^{-1}(0)$, i.e. $F \circ \phi(t) = 0$, então $DF(\phi(t))\, D\phi(t) = 0$. Assim, para $t = 0$, $i = 1, \dots, n-m$ e $j = 1, \dots, m$,

$$\nabla F_i(p) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(0) = 0.$$

I.e. as linhas de $DF(p)$ são ortogonais a todos os vectores da base de T_pM. Logo, $T_pM^\perp$ é o espaço de dimensão $n-m$ gerado pelas $n-m$ linhas de $DF(0)$ que são linearmente independentes. Por outro lado, o espaço tangente é o núcleo (*kernel*) da matriz $DF(p)$. □

Exercício 1.3.14. Considere as variedades seguintes e determine as suas dimensões e espaços tangente e normal no ponto p:

1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 - y^2\}$, $p = (1, 0, 1)$
2. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2 + 1,\ 0 < z < 2\}$, $p = (0, \sqrt{2}, 1)$

1.4 Extremos condicionados

Seja $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ uma função escalar C^1 definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Considere ainda uma m-variedade diferencial $M \subset D$ com $1 \leq m < n$. O nosso objectivo é determinar os extremantes e os extremos da função $\varphi|M$ que consiste na restrição de φ a M. Recorde que p é extremante de φ se $\varphi(p)$ é um extremo de φ.

Note que M não contém qualquer aberto de $\mathbb{R}^n$ (pois a dimensão da variedade m é inferior à do espaço ambiente n). O que significa que não podemos simplesmente procurar os pontos de estacionaridade (onde a derivada de φ se anula) que estejam em M. Em geral os pontos extremantes de $\varphi|M$ não são pontos de estacionaridade de φ.

Teorema 1.4.1. *Se p é extremante local de $\varphi|M$, então*

$$\nabla\varphi(p) \in T_pM^\perp.$$

Demonstração. Considere a parametrização $\phi\colon V \to M \cap U$ de M em redor de $p \in M$ tal que $\phi(0) = p$. Seja $i = 1, \dots, m$ e $\psi_i\colon]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi_i(t) = \varphi \circ \phi(te_i),$$

onde $\delta > 0$ é tomado suficientemente pequeno e e_i é o vector da base canónica de $\mathbb{R}^m$ com 1 na coordenada i. Como ψ_i é C^1 e p é um extremante local de φ em M, então ψ_i tem ponto de estacionaridade em 0, i.e. $\psi_i'(0) = 0$. Assim,

$$\psi_i'(0) = \nabla\varphi(p)\, D\phi(0)\, e_i = 0.$$

Logo, $\nabla\varphi(p)$ é ortogonal às colunas de $D\phi(0)$. Ou seja, $\nabla\varphi(p)$ é um vector normal. □

Observação 1.4.2. O vector gradiente $\nabla\varphi(p)$ pode ser decomposto na soma de um vector tangente $v \in T_pM$ e um normal $u \in T_pM^\perp$, $\nabla\varphi(p) = v + u$. O teorema acima afirma então que se p é um extremante de $\varphi|M$, então $v = 0$.

Recorde que uma variedade é localmente o gráfico de uma função. Isto é, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U e uma função $f\colon W \to \mathbb{R}^{n-m}$ com $W \subset \mathbb{R}^m$ tal que $M \cap U = G_f$. Assim, os extremos locais de φ em $M \cap U$ são os mesmos da função $g\colon W \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \varphi(x, f(x)).$$

Exemplo 1.4.3. Considere $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ e $M = \{(x, \cos x) \in \mathbb{R}^2\colon x \in \mathbb{R}\}$. Logo, $f(x) = \cos x$ e $W = \mathbb{R}$. Temos então $g(x) = \varphi(x, \cos x) = x^2 - \cos^2 x$. Para determinar os extremos locais de g basta estudar os zeros da sua derivada e a segunda derivada dos pontos de estacionariedade. De $g'(x) = 0$ obtemos $2x = \sin(2x)$ que tem solução $x = 0$. Como $g''(0) = 4 > 0$, g tem um mínimo em 0. Finalmente φ restringida a M tem um mínimo em $(0, \cos 0) = (0, 1)$.

1.4.1 Método dos multiplicadores de Lagrange

Considere a representação implícita de M, ou seja para cada $p \in M$ a existência de uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de p e $F \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-m})$ tais que $M \cap U = F^{-1}(0)$ e $\operatorname{rank} DF(x) = n - m$, $x \in M \cap U$. Pelo Teorema 1.3.13, o gradiente de φ em p pertence ao espaço normal a M em p sse é uma combinação linear das linhas de $DF(p)$. Ou seja, existem $\lambda_1, \dots \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla\varphi(p) + \lambda_1 \nabla F_1(p) + \cdots + \lambda_{n-m} \nabla F_{n-m}(p) = 0.$$

Aos escalares $\lambda_1, \dots \lambda_{n-m}$ dá-se o nome de **multiplicadores de Lagrange**. Note que podemos rescrever a expressão acima como

$$\nabla\varphi(p) + (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})\, DF(p) = 0.$$

Iremos usar o Teorema 1.4.1 para determinar candidatos a extremos de $\varphi|M$. Estes serão os que verificam a condição do gradiente ser normal à variedade. Um método prático de determinação destes pontos é o seguinte. Definimos a **função Lagrangeana**

$$\mathcal{L}\colon (D \cap U) \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}, \qquad (x, \lambda) \mapsto \varphi(x) + \lambda \cdot F(x),$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$, e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, \lambda) = \nabla\varphi(x) + \lambda\, DF(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, \lambda) = F(x).$$

Assim temos que se $p \in M$ é extremante de $\varphi|M$, então existe λ tal que

$$\nabla\mathcal{L}(p, \lambda) = 0.$$

Ou seja, $\nabla\varphi(p) \in T_pM^\perp$ e $F(p) = 0$ (i.e. $p \in M$).

Exemplo 1.4.4. Queremos determinar os pontos de

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + z = 1,\ x^2 + y^2 = z\}$$

mais próximos da origem. Para isso consideramos uma função φ que meça a distância à origem. Escolhemos $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ em lugar de $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de forma a simplificar os cálculos.

O conjunto M é uma 1-variedade (uma curva) pois podemos defini-la implicitamente usando $F(x, y, z) = (x + z - 1, x^2 + y^2 - z)$ e observando que $\operatorname{rank} DF(x, y, z) = 2$ para $(x, y, z) \in M$.

Temos então

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + z - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z).$$

Finalmente, $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0, 0)$ tem soluções

$$p_1 = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right), \qquad p_2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

para algum λ que não nos interessa calcular. Estes são os possíveis extremantes. A função φ é limitada inferiormente e diverge quando $\|(x,y,z)\| \to +\infty$. Logo tem que ter um mínimo que deverá corresponder a um dos pontos determinados acima. Como $0 \leq \varphi(p_2) = 5 - 2\sqrt{5} < \varphi(p_1) = 5 + 2\sqrt{5}$, então p_2 é o minimizante global, i.e. o ponto de M mais próximo da origem.

Exercício 1.4.5. Determine os extremos de φ em M:

1. $\varphi(x,y) = x$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 3\}$.

2. $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x,2) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$.

3. $\varphi(x,y,z) = x$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}$.

Exercício 1.4.6. Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima. *Sugestão*: Escreva a soma como uma função a minimizar, sobre a superfície que corresponde ao produto de três números positivos igual a 1.

Exercício 1.4.7. Dados $R > r > 0$, considere o conjunto

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\}.$$

1. Mostre que M é uma variedade diferencial e calcule $\dim M$.

2. Determine T_pM e $T_pM^\perp$ para qualquer $p \in M$.

3. Seja $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y,z) = y$. Calcule os extremos de $\varphi|M$.

Exercício 1.4.8. *Considere uma matriz A simétrica 3×3 não nula, e a função $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} x \cdot Ax.$$

Sabendo que φ tem máximo e mínimo na 2-esfera

$$S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x \cdot x = 1\right\},$$

mostre que existe $x_0 \in S^2$ e $\beta \neq 0$ tais que $Ax_0 = \beta x_0$.

1.4.2 Classificação de extremos

Seja A uma matriz quadrada simétrica com dimensão $n \times n$ e B uma matriz $(n-m) \times n$ onde $0 \leq m < n$. Dizemos que A é **definida positiva em** $\ker B$ (escreve-se $A > 0$ em $\ker B$) se $v^T A v > 0$ para qualquer $v \in \ker B \setminus \{0\}$. Por outro lado, A é **definida negativa em** $\ker B$ ($A < 0$ em $\ker B$) se $v^T Av < 0$ com $v \in \ker B \setminus \{0\}$. Considere ainda a matriz

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ B_i^T & A_i \end{bmatrix}$$

onde A_i é a matriz $i \times i$ constituída pelas primeiras i linhas e i colunas de A, e B_i é a matriz $(n-m) \times i$ das primeiras i colunas de B.

O seguinte critério de classificação pode ser encontrado na literatura.

Teorema 1.4.9.

1. *$A > 0$ em $\ker B$ sse $(-1)^{n-m} \det C_i > 0$, $i = n-m+1, \ldots, n$.*
2. *$A < 0$ em $\ker B$ sse $(-1)^i \det C_i > 0$, $i = n-m+1, \ldots, n$.*

Exemplo 1.4.10. Sejam

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Temos assim

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $(-1)\det C_2 = 5 > 0$, temos que $A > 0$ em $\ker B$.

Tomemos agora a função Lagrangeana $\mathcal{L}$ com φ e F funções C^2. A segunda derivada de $\mathcal{L}$ em ordem a x é uma matriz simétrica $n \times n$ dada por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x, \lambda) = D^2\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i D^2 F_i(x).$$

Note que $\ker DF(x) = T_x M$.

Teorema 1.4.11. *Dado $(p, \lambda) \in D \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $D\mathcal{L}(p, \lambda) = 0$, seja $A = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 x}(p, \lambda)$ e $B = DF(p)$. Temos assim que*

1. *se $A > 0$ em T_pM, p é um minimizante local estrito de $\varphi|M$,*
2. *se $A < 0$ em T_pM, p é um maximizante local estrito de $\varphi|M$,*
3. *se p é um minimizante local de $\varphi|M$, $v^T Av \geq 0$ para $v \in T_pM$,*
4. *se p é um maximizante local de $\varphi|M$, $v^T Av \leq 0$ para $v \in T_pM$,*
5. *se $v^T Av$ muda de sinal em T_pM, p é um ponto de sela.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que se p não é um minimizante local estrito de $\varphi|M$, então A não é definida positiva em $\ker B = T_pM$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x(\varepsilon) \in M \cap B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ tal que

$$\varphi(x(\varepsilon)) \leq \varphi(p).$$

Considere as sucessões $\varepsilon_n > 0$ tal que $\varepsilon_n \to 0$, $x_n = x(\varepsilon_n) \to p$ e

$$y_n = \frac{x_n - p}{\|x_n - p\|}.$$

Como y_n está contido no compacto $C = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z\| = 1\}$ para qualquer $n \geq 1$, existe uma subsucessão convergente $y_{k_n} \to y \in C$ com $y \neq 0$.

A expansão de Taylor de F em torno de p é dada por

$$F(x_{k_n}) = F(p) + DF(p)(x_{k_n} - p) + o(\|x_{k_n} - p\|).$$

Como $F(x_{k_n}) = F(p) = 0$ por serem pontos em M, temos

$$DF(p)y_{k_n} + \frac{o(\|x_{k_n} - p\|)}{\|x_{k_n} - p\|} = 0.$$

Pelo teorema de Taylor, a segunda parcela tende para 0 quando $x_{k_n} \to p$ (i.e. $n \to +\infty$). Então, $DF(p)\, y = 0$, ou seja $y \in T_pM \setminus \{0\}$.

A fórmula de Taylor para $L(x) = \mathcal{L}(x, \lambda)$ (fixamos λ) em torno de p implica

$$L(x_{k_n}) = L(p) + DL(p)(x_{k_n} - p) + \frac{1}{2}(x_{k_n} - p)^T A(x_{k_n} - p) + o(\|x_{k_n} - p\|^2).$$

Logo,

$$\frac{1}{2} y_{k_n}^T A y_{k_n} + \frac{o(\|x_{k_n} - p\|^2)}{\|x_{k_n} - p\|^2} = \frac{f(x_{k_n}) - f(p)}{\|x_{k_n} - p\|^2} \leq 0.$$

Para $n \to +\infty$, ficamos com $y^T A y \leq 0$, o que completa a demonstração de (1).

As restantes demonstrações ficam como exercício. □

Exercício 1.4.12. Determine e classifique os extremos de φ em M:

1. $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$
2. $\varphi(x, y) = xy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 2a^2\}$
3. $\varphi(x, y) = x^{-1} + y^{-1}$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^{-2} + y^{-2} = a^{-2}\}$
4. $\varphi(x, y, z) = x + y + z$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (1/x) + (1/y) + (1/z) = 1\}$
5. $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0, x + z = 6\}$
6. $\varphi(x, y, z) = x + y$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy = 16\}$
7. * $\varphi(x, y, z) = xyz$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 5, xy + xz + yz = 8\}$

Capítulo 2

Integral de Riemann

Neste capítulo iremos primeiro generalizar o conceito de integral de Riemann para funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Integral de Riemann

O integral de Riemann para funções com uma variável num intervalo de $\mathbb{R}$ é obtido como o limite do integral de funções em escada, definidas em partições cada vez mais finas. Iremos generalizar estes conceitos para dimensões superiores.

Dizemos que um conjunto I é um **intervalo de** $\mathbb{R}^n$ sse é dado por

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n \quad \text{onde} \quad I_i = [a_i, b_i],$$

para alguma escolha de $a_i \leq b_i$. Note que cada I_i é um intervalo fechado e finito de $\mathbb{R}$.

O n**-volume de um intervalo** I é naturalmente definido por

$$\mathrm{vol}_n(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Uma **partição de um intervalo** I é um conjunto de pontos em I dado por

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n,$$

onde $P_i = \{x_{i,0}, \ldots, x_{i,m_i}\}$ é uma partição de I_i em $\mathbb{R}$, com $m_i \in \mathbb{N}$. Ou seja, temos $a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,m_i} = b_i$, o que significa que cada I_i pode ser decomposto em m_i subintervalos $I_{i,j} = [x_{i,j}, x_{i,j+1}]$. Temos então

$$I_i = \bigcup_{j=0}^{m_i-1} I_{i,j}.$$

Finalmente, I pode ser decomposto em $M = \prod_{i=1}^{n} m_i$ subintervalos na forma

$$I = \bigcup_{j_1=0}^{m_1-1} \cdots \bigcup_{j_n=0}^{m_n-1} J_{j_1,\ldots,j_n}$$

onde

$$J_{j_1,\cdots,j_n} = I_{1,j_1} \times \cdots \times I_{n,j_n}.$$

Podemos ordenar estes conjuntos denotando-os por R_k, com $k = 1, \ldots M$.

Exemplo 2.1.1. Considere o rectângulo $I = [0,1] \times [0,2]$. Se escolhermos $P_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ e $P_2 = \{0, \frac{1}{2}, 2\}$, temos que

$$P = \left\{(0,0), \left(0, \frac{1}{2}\right), (0,2), \left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \right.$$
$$\left. \left(\frac{1}{3}, 2\right), \left(\frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, 2\right), (1,0), \left(1, \frac{1}{2}\right), (1,2)\right\}.$$

Neste caso $m_1 = 3$ e $m_2 = 2$. A partição corresponde assim à decomposição de I nos seguintes 6 subintervalos

$$I = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6,$$

com

$$R_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad R_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad R_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right],$$
$$R_4 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 2\right], \quad R_5 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 2\right], \quad R_6 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

Uma função $s\colon I \to \mathbb{R}$ é **função em escada** sse existe uma partição tal que s é constante no interior de cada subintervalo R_k.

Exemplo 2.1.2. Usando a partição do exemplo anterior, considere a função em escada dada por $s(x) = k$ quando $x \in \operatorname{Int} R_k$.

Seja s uma função em escada em I e $s(\operatorname{Int} R_k) = \{s_k\}$. O **integral de s em I** é definido como

$$\int_I s = \sum_{k=1}^{M} s_k \operatorname{vol}(R_k).$$

Exemplo 2.1.3. Considere a função em escada s do exemplo anterior. Então,

$$\int_I s = \sum_{k=1}^{6} k \operatorname{vol}(R_k) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{12}{6} + \frac{15}{6} + \frac{18}{6} = \frac{51}{6}.$$

Observação 2.1.4. Note que para o cálculo do integral é indiferente o valor de s na fronteira de R_k. Daí a definição de função em escada não ter em conta esses valores.

Iremos usar a definição de integral de uma função em escada para introduzir o integral de funções mais gerais.

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ limitada. Considere

$$\underline{\int_I} f = \sup\left\{\int_I s\colon s \leq f, s \text{ é função em escada}\right\}$$
$$\overline{\int_I} f = \inf\left\{\int_I t\colon f \leq t, t \text{ é função em escada}\right\},$$

onde $g \leq f$ significa $g(x) \leq f(x)$ para qualquer $x \in I$. Dizemos que f é **integrável à Riemann em** I sse $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$. Se f é integrável à Riemann então o **integral de Riemann de** f **em** I é dado por

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

Iremos usar as seguintes notações para o integral:

$$\int_I f = \int_I f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Exemplo 2.1.5. Considere $I = [0,1] \times [0,1]$ e $f(x,y) = xy$. Escolhendo a partição

$$P = \left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N} \dots, 1\right\} \times \left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N} \dots, 1\right\}$$

em N^2 quadrados, tomamos as funções em escada definidas em $(x,y) \in \operatorname{Int} I_{i,j}$ por

$$s(x,y) = \inf_{I_{i,j}} f = \frac{ij}{N^2} \quad \text{e} \quad t(x,y) = \sup_{I_{i,j}} f = \frac{(i+1)(j+1)}{N^2}.$$

Assim,

$$\int_I s = \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{ij}{N^2} \operatorname{vol}(I_{i,j}) = \frac{(N-1)^2}{4N^2}$$

Procedendo da mesma forma, $\int_I t = \frac{(N+1)^2}{4N^2}$. Logo,

$$\frac{(N-1)^2}{4N^2} \leq \sup_{\widetilde{s} \leq f} \int_I \widetilde{s} \leq \inf_{f \leq \widetilde{t}} \int_I \widetilde{t} \leq \frac{(N+1)^2}{4N^2}.$$

Tomando o limite $N \to +\infty$, temos que f é integrável e $\int_I f = \frac{1}{4}$.

Observação 2.1.6. No teorema 6.4.1 encontra-se um critério de integrabilidade à Riemann. Em particular, qualquer função contínua num intervalo compacto é integrável à Riemann.

2.2 Teorema de Fubini

Para funções na forma $f(x,y)$ escrevemos $f_x(y) = f(x,y)$ como a função que se obtém de f fixando x e apenas variando y. De forma semelhante escrevemos $f_y(x)$.

Teorema 2.2.1 (Fubini)**.** *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos. Se $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$, $f_x\colon B \to \mathbb{R}$ e $f_y\colon A \to \mathbb{R}$ são funções integráveis à Riemann, então*

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f_x \, dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f_y \, dx \right) dy.$$

Demonstração. Considere uma partição P de $A \times B$. Temos então que $P = P_A \times P_B$ onde P_A é uma partição de A e P_B de B. Um subintervalo de $A \times B$ correspondente a P pode ser escrito como $R_{i,j} = J_i \times K_j$ com J_i e K_j subintervalos de A e B dados pelas partições respectivas. Assim,

$$\mathrm{vol}_{n+m}(R_{i,j}) = \mathrm{vol}_n(J_i)\ \mathrm{vol}_m(K_j).$$

Esta forma natural de obtermos partições será útil para determinarmos funções em escada para f_x e f_y a partir de funções em escada de f.

Seja $s\colon A \times B \to \mathbb{R}$ uma função em escada de f tal que é igual a $s_{i,j}$ em $\mathrm{Int}\, R_{i,j}$ e $s \leq f$. Uma função escada de f_x é dada por $s_x(y) = s(x,y)$, $y \in B$. Podemos facilmente verificar que s_x no interior do intervalo K_j é igual a $s_{i,j}$ com $(x,y) \in \mathrm{Int}\, R_{i,j}$ e que $s_x \leq f_x$.

Definindo $F(x) = \int_B f_x$ pois f_x é integrável, a função em escada

$$s'(x) = \int_B s_x$$

verifica $s' \leq F$. Ou seja, s' toma o valor

$$s'_i = \sum_j s_{i,j}\, \mathrm{vol}_m(K_j)$$

quando $x \in J_i$. Logo,

$$\int_{A\times B} s = \sum_{i,j} s_{i,j}\, \mathrm{vol}_n(J_i)\ \mathrm{vol}_m(K_j) = \sum_i s'_i\, \mathrm{vol}_n(J_i).$$

Ou seja,

$$\int_{A\times B} s \leq \int_A F = \int_A \left(\int_B f_x \right).$$

Aplicando a mesma ideia a t obtemos

$$\int_{A\times B} s \leq \int_A \left(\int_B f_x\right) \leq \int_{A\times B} t.$$

Como f é integrável, provámos a primeira igualdade do enunciado do teorema. A segunda segue da mesma ideia, trocando a ordem de x e y. $\square$

Observação 2.2.2. O teorema de Fubini permite-nos integrar cada variável de cada vez, como um integral em $\mathbb{R}$ (basta considerar $m = 1$). Permite ainda alterar a ordem de integração, se isso simplificar os cálculos.

Exemplo 2.2.3. Considere $f(x, y) = x(x^2 + y)^2$ e $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Note que f_x e f_y são ambas funções integráveis em $[0, 1]$ por serem contínuas. Supondo que f é integrável, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 x(x^2 + y)^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 x(x^2 + y)^2 \, dy\right) dx \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{(x^2 + y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{(x^2 + 1)^3}{3} - \frac{(x^2)^3}{3}\right] dx \\ &= \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

Observação 2.2.4. Apesar de termos definido o integral para intervalos $I \subset \mathbb{R}^n$, podemos considerar outros conjuntos $D \subset I$ desde que fora de D a função integranda seja nula. Ou seja, considerando a **função característica** de S definida por

$$\mathcal{X}_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

temos que

$$\int_D f = \int_I \mathcal{X}_D \, f.$$

Exemplo 2.2.5. Seja $f(x, y) = x^3 y$, $I = [0, 1] \times [0, 2]$ e $D = \{(x, y) \in I \colon x^2 < y < 2x^2\}$. Sabemos que f_x e f_y são integráveis e assumimos que f integrável. Assim, $\int_D f = \int_I g$ com $g = f\mathcal{X}_D$,

$$g_x(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq x^2 \\ x^3 y, & x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & 2x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^2 g(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^2 g_x(y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} x^3 y\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=2x^2} dx \\ &= \frac{3}{16}.\end{aligned}$$

Em alternativa, pelo teorema de Fubini podemos calcular o mesmo integral fazendo primeiro a integração em x e só depois em y:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^2 g(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}} x^3 y\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y/2}}^{1} x^3 y\,dx\,dy \\ &= \frac{3}{16}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.6. Seja $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = e^{x^2}$ e

$$D = \{(x,y) \in [0,1]^2 \colon y < x\}.$$

A ordem de integração é crucial neste caso. Se integrarmos primeiro em y obtemos

$$\int_0^1 e^{x^2} \int_0^x dy\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}.$$

Se integrarmos primeiro em x obtemos o integral $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\,dy$ que não sabemos tratar por não conhecermos uma forma explícita de uma primitiva de e^{x^2} (apesar de sabermos ser primitivável).

Exercício 2.2.7. Calcule:

1. $\int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{y} + x - 3xy^2)\,dx\,dy$.
2. $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 x\, \sin^2 y\,dx\,dy$.
3. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy$.
4. $\int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x+y)|\,dx\,dy$.
5. $\int_1^2 \int_1^2 y^{-3} e^{2x/y}\,dx\,dy$.
6. $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xy^2 z^3\,dx\,dy\,dz$.

Exercício 2.2.8. Calcule o volume da região por baixo do gráfico de $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y, & x+y \leq 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Exercício 2.2.9. Esboce D e calcule $\int_D f$ onde

1. $f(x,y) = x\cos(x+y)$ e D é o triângulo $(0,0)$, $(0,\pi)$ e (π,π).
2. $f(x,y) = e^{x+y}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x|+|y| \leq 1\}$.
3. $f(x,y,z) = xy^2z^3$ e D é o sólido limitado pelos três planos coordenados, pela superfície $z = xy$ e pelo plano $x+y=1$.
4. $f(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-3}$ e D é o sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$.
5. $f(x,y,z) = \sqrt{1+y}$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2-1 \leq y \leq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq y\}$.

2.3 Aplicações do integral

O **volume de** D é definido por

$$\mathrm{vol}(D) = \int_D 1$$

e a média de uma função f em D é dada por

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_D f.$$

Por exemplo, o **centróide de** D é o ponto médio $z = (z_1, \ldots, z_n)$ onde

$$z_i = \langle x_i \rangle.$$

Considerando uma função densidade $\rho\colon D \to \mathbb{R}_0^+$ (pode ser a massa de um corpo por unidade de volume, a riqueza de uma região por unidade de área, a densidade de probabilidade, etc.) tomamos agora médias ponderadas. Definimos assim a **massa de** D como

$$\mathrm{massa}\, D = \int_D \rho$$

e a média ponderada de f em D é dada por

$$\langle f \rangle_\rho = \frac{1}{\mathrm{massa}\, D} \int_D f\,\rho.$$

Como exemplo, o **centro de massa de** D é o ponto $z = (z_1, \ldots, z_n)$ com coordenadas
$$z_i = \langle x_i \rangle_\rho.$$

Exercício 2.3.1. Calcule a área e o centróide de
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ y + x \leq 1,\ y \leq x\}.$$

Exercício 2.3.2. Sabendo que a densidade de massa do objecto
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$$
é $\rho(x, y) = (1 - y)/(1 + x)$, determine a sua massa e o seu centro de massa.

Exercício 2.3.3. Calcule a distância média entre um canto de um quadrado e os pontos do seu interior. *Sugestão*: Para calcular a primitiva de $\sqrt{1 + x^2}$, use a substituição $x = \sinh(\alpha)$ (recorde que $\sinh(\alpha) = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$).

Exercício 2.3.4. Considere o conjunto
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ -y \leq x \leq y\}.$$

1. Calcule $\int_D \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$.
2. Determine o centróide de D.

Exercício 2.3.5. *Calcule a distância média entre um canto de um quadrado e os pontos do seu interior.

2.4 Mudança de coordenadas de integração

Em $\mathbb{R}$ utiliza-se a mudança de coordenadas de integração para simplificar integrais. Se encontrarmos uma bijecção C^1 dada por $g \colon [c, d] \to [a, b]$, temos então
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\, g'(y)\, dy &= \begin{cases} \int_c^d f \circ g\, g', & g' \geq 0 \\ \int_d^c f \circ g\, g', & g' \leq 0 \end{cases} \\ &= \int_c^d f(g(y))\, |g'(y)|\, dy.\end{aligned}$$

Vamos generalizar esta ideia para integrais em $\mathbb{R}^n$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma transformação $h \colon A \to \mathbb{R}^n$ é uma **mudança de coordenadas** em A sse h é C^1, injectiva e $\det Dh(x) \neq 0$, $x \in A$.

Observação 2.4.1. Note que pelo teorema da função inversa, h^{-1} também é uma mudança de coordenadas. Ou seja, h é um difeomorfismo entre A e $h(A)$.

Exemplo 2.4.2. *Mudança entre coordenadas polares e cartesianas no plano.* Considere a transformação em $A =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ dada por

$$h\colon A \to \mathbb{R}^2, \qquad h(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Temos então que

- h é C^∞,
- h é injectiva em A,
- $h(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y = 0\}$,
- $\det Dh(r,\theta) = r > 0$.

Logo, h é uma mudança de coordenadas entre A e o plano menos uma semi-recta.

Exemplo 2.4.3. *Mudança entre coordenadas esféricas e cartesianas no espaço.* Seja $A =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e a transformação

$$h\colon A \to \mathbb{R}^3, \qquad h(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Esta função é

- C^∞,
- injectiva em A,
- $h(A) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \colon x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$,
- $\det Dh(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi > 0$.

Finalmente, h é uma mudança de coordenadas entre A e o espaço menos um semi-plano.

Observação 2.4.4. Nos exemplos acima obtivemos mudanças de variáveis para todos os pontos do plano excepto uma semi-recta, e para todos os pontos do espaço excepto um semi-plano. Tanto a semi-recta como o semi-plano têm volume nulo nos espaços considerados, o que não afectará os valores dos integrais.

Teorema 2.4.5 (Mudança de coordenadas de integração)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, h uma mudança de coordenadas em A, $B \subset h(A)$ e $f\colon B \to \mathbb{R}$ integrável. Então,*

$$\int_B f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(B)} f(h(y))\,|\det Dh(y)|\,dy.$$

Exercício 2.4.6. ***Escreva uma demonstração deste teorema. *Sugestão*: Recorra à biblioteca.

Exemplo 2.4.7. Seja $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e $B = \mathbb{R}^2$. Usando a mudança entre coordenadas polares e cartesianas temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} f = \int_{h^{-1}(A)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|\, dr\, d\theta,$$

onde $A =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr = \pi.$$

Note ainda que $\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2$. Logo, obtemos uma relação muito conhecida na teoria de probabilidades

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Exemplo 2.4.8. Considere a esfera sólida de raio R:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Para calcular o seu volume usamos a mudança entre coordenadas esféricas e cartesianas para obter:

$$\operatorname{vol}(E) = \int_E 1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Exemplo 2.4.9. Seja

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < z < \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Para calcular o volume de S usamos agora uma mudança entre coordenadas cilíndricas e cartesianas. Considerando $A =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$, seja

$$h \colon A \to \mathbb{R}^3, \qquad h(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

É simples verificar que h é uma mudança de coordenadas e $\det Dh(r,\theta,z) = r > 0$.

Podemos agora rescrever as condições de A como $r^2 < z < r$ e $\theta \in]0,\pi/2[$. A primeira condição obriga a que $r \in]0,1[$. Finalmente,

$$\operatorname{vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^r r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{24}.$$

Exercício 2.4.10. Calcule o volume de um toro.

Exercício 2.4.11. Use uma mudança linear de coordenadas para calcular

$$\int_S (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dx\, dy$$

onde S é o paralelogramo com vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

Exercício 2.4.12. Mostre que:

1. $\int_S f(x+y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} f(u)\, du$ onde

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}.$$

2. $\int_S f(xy)\, dx\, dy = \log(2) \int_1^2 f(u)\, du$ onde S é a região no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

Exercício 2.4.13. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 2,\ x^2 < y < x^2 + 1\}$$

e a função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x, y - x^2)$.

1. Mostre que g é uma mudança de coordenadas.

2. Use g para calcular $\int_S x^2\, dx\, dy$.

Exercício 2.4.14. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\ x^2 - 1 < y < x^2,\ x^3 < z < x^3 + 2\}$$

e a função $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(x, y, z) = (x, y - x^2, z - x^3)$.

1. Mostre que g é uma mudança de coordenadas.

2. Use g para calcular
$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Exercício 2.4.15. Calcule o volume tri-dimensional dos seguintes conjuntos:

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y^2 + z^2 \leq x + 1/2,\ x \leq 3/2 - \sqrt{y^2 + z^2}\}$.

2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0,\ y > 0,\ 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

Exercício 2.4.16. * Para cada $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$B_n(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq a \right\}.$$

Prove que o volume n-dimensional de $B_n(a)$ é dado por

$$\operatorname{vol}_n B_n(a) = \frac{(2a)^n}{n!}.$$

Sugestão: Mostre que $\operatorname{vol}_n B_n(a) = a^n \operatorname{vol}_n B_n(1)$ e que $\operatorname{vol}_{n+1} B_{n+1}(1) = 2/(n+1) \operatorname{vol}_n B_n(1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Integração em variedades

Vamos agora integrar funções restringidas a variedades diferenciais. Temos que tomar em atenção que iremos integrar em dimensões inferiores à do espaço ambiente $\mathbb{R}^n$.

3.1 Integrais de funções escalares em variedades

Seja M uma m-variedade em $\mathbb{R}^n$ com $1 \leq m \leq n$, e $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função escalar. Considere uma parametrização de M em torno de um ponto $p \in M$, dada por $\phi\colon V \to M \cap U$, onde $V \subset \mathbb{R}^m$ é aberto e $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de p. Assim, definimos o integral de f em $M \cap U$ por

$$\int_{M\cap U} f\, dv_m = \int_{\phi^{-1}(M\cap U)} f \circ \phi(x) \sqrt{\det(D\phi(x)^T D\phi(x))}\, dx_1 \dots dx_m.$$

O **integral de f na m-variedade** M pode ser obtido como a soma dos integrais sobre uma cobertura de M, i.e.

$$\int_M f\, dv_m = \sum_i \int_{M\cap U_i} f\, dv_m,$$

onde $M \subset \bigcup_i U_i \cup \bigcup_j S_j$ e U_i são os termos de uma sucessão de conjuntos abertos disjuntos dois a dois (i.e. $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$) correspondendo a parametrizações locais $\phi_i\colon V_i \to M \cap U_i$, e S_j são subconjuntos da união das fronteiras dos U_i.

Observação 3.1.1. Quando $m = n$, i.e. a variedade é um aberto de $\mathbb{R}^n$, obtemos a fórmula de mudanças de variáveis de integração obtida no Teorema 2.4.5. De facto, para $m = n$ temos que $D\phi(x)$ é uma matriz quadrada e $\det(D\phi(x)^T\, D\phi(x)) = (\det(D\phi(x)))^2$.

Observação 3.1.2. Se $m < n$, é importante não confundir $\int_M f\, dv_m$ com o integral $\int_M f(x) dx_1 \dots dx_n$. No primeiro apenas temos m variáveis de integração, enquanto que no segundo temos n. Note que o segundo é igual a zero.

Observação 3.1.3. Usamos por vezes a notação $\int_M f\, dv_m = \int_M f(x)\, dv_m(x)$.

Exemplo 3.1.4. Considere uma curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por $\gamma\colon]a,b[\to \mathbb{R}^n$. Integrar uma função escalar $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ corresponde então a calcular

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\, dv_1 &= \int_a^b f \circ \gamma(t) \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}\, dt \\ &= \int_a^b f \circ \gamma(t)\, \|\gamma'(t)\|\, dt.\end{aligned}$$

Podemos aplicar esta fórmula à circunferência unitária $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e à função $f(x,y) = x$. Obtemos assim $\int_{S^1} f\, dv_1 = 0$.

Teorema 3.1.5. *$\int_M f\, dv_m$ não depende da parametrização de M.*

Demonstração. Considere duas parametrizações diferentes de M em p dadas por $\phi_1\colon V_1 \to M \cap U$ e $\phi_2\colon V_1 \to M \cap U$. Considere a mudança de coordenadas entre ambas, i.e. $\psi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1\colon V_1 \to V_2$. Assim, $D\phi_1 = D\phi_2 \circ \psi\, D\psi$. Note que $D\psi$ é uma matriz $m \times m$.

Temos então

$$\begin{aligned}\det(D\phi_1^T D\phi_1) &= \det(D\phi_2 \circ \psi\, D\psi)^T D\phi_2 \circ \psi\, D\psi \\ &= \det D\psi^T (D\phi_2 \circ \psi^T D\phi_2 \circ \psi) D\psi \\ &= (\det D\psi)^2 \det(D\phi_2 \circ \psi^T D\phi_2 \circ \psi).\end{aligned}$$

Usando esta expressão na fórmula para o cálculo do integral

$$\begin{aligned}&\int_{\phi_1^{-1}(M\cap U)} f \circ \phi_1 \sqrt{\det D\phi_1^T D\phi_1} = \\ &= \int_{\psi^{-1}\circ\phi_2^{-1}(M\cap U)} f \circ \phi_2 \circ \psi\, |\det D\psi|\, \sqrt{\det D\phi_2 \circ \psi^T D\phi_2 \circ \psi} \\ &= \int_{\phi_1^{-1}(M\cap U)} f \circ \phi_1 \sqrt{\det D\phi_1^T D\phi_1},\end{aligned}$$

onde usámos o teorema de mudança de coordenadas de integração. □

Exercício 3.1.6. Calcule $\sqrt{\det D\phi^T D\phi}$ para a parametrização ϕ de um cilindro e de um toro.

Exercício 3.1.7. Considere a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

Calcule o integral em Γ da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

3.2 Aplicações

Uma aplicação dos integrais é a determinação do volume de variedades, centróides e centros de massa. Definimos o **volume** de uma m-variedade M como

$$\operatorname{vol} M = \int_M 1 \, dv_m$$

e a média de uma função f em M é

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\operatorname{vol} M} \int_M f \, dv_m.$$

Por exemplo, o **centróide** de M é o ponto $z = (z_1, \ldots, z_n)$ onde

$$z_i = \langle x_i \rangle.$$

Dada uma função densidade $\rho \colon M \to \mathbb{R}$, a massa de M é

$$\operatorname{massa} M = \int_M \rho \, dv_m$$

e a média ponderada de uma função escalar f em M é

$$\langle f \rangle_\rho = \frac{1}{\operatorname{massa}(M)} \int_M f \, \rho \, dv_m.$$

O **centro de massa** de M é o ponto $z = (z_1, \ldots, z_n)$ com

$$z_i = \langle x_i \rangle_\rho.$$

Exemplo 3.2.1. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ a superfície de uma esfera com raio $R > 0$. Usando coordenadas esféricas (θ, φ) para construir uma parametrização de M, obtemos

$$\sqrt{\det D\phi(\theta, \varphi)^T D\phi(\theta, \varphi)} = R^2 |\cos \varphi|.$$

Podemos agora calcular a área de M:

$$\int_M 1 \, dv_2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2.$$

Exercício 3.2.2. Calcule a área da superfície de um cilindro e de um toro.

Exercício 3.2.3. Esboce o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$, e calcule a sua massa se a densidade de massa ao longo da curva é dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exercício 3.2.4. Calcule o centróide de $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

Exercício 3.2.5. Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ obtida como a intersecção entre o cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$ com o cone $x^2 + y^2 = z^2$. Calcule $\int_M f$ onde $f(x, y, z) = x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1$.

Exercício 3.2.6. * Seja $\varphi \colon M \to \mathbb{R}$ onde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = f(x, y),\ (x, y) \in V\}$ com $f \in C^1(V)$ e $V \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\int_M \varphi \, dv_2 = \int_V \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} \, dx \, dy.$$

Exercício 3.2.7. ** Repita o exercício anterior para uma $(n-1)$-variedade $M \subset \mathbb{R}^n$.

3.3 Teorema da divergência

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Iremos usar a notação ∂D para a fronteira de D e $\overline{D} = \operatorname{Int} D \cup \partial D$ é o fecho de D. Dizemos que D é um **domínio regular** sse $\operatorname{Int} \overline{D} = D$ e ∂D é uma $(n-1)$-variedade. Note que $\overline{D}$ é compacto.

Exemplo 3.3.1. Seja $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Temos que $\operatorname{Int} \overline{D} = D$ e $\partial D = S^2$, logo D é um domínio regular.

Exemplo 3.3.2. Considere $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 1, z \neq 0\}$. Neste caso, $\operatorname{Int} \overline{D} \neq D$.

Seja um domínio regular D e $p \in \partial D$. Note que a dimensão do espaço normal a ∂D em p é 1 pois $\dim T_p \partial D = n - 1$. Se F é a função C^1 que representa implicitamente a variedade numa vizinhança U de p, i.e. $\partial D \cap U = \{x \in U \colon F(x) = 0\}$, então $\nabla F(p)$ é não nulo e gera o espaço normal. Existem assim dois vectores normais com norma unitária. A **normal exterior unitária** a ∂D em p é o vector

$$\nu(p) = \pm \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}.$$

onde o sinal é escolhido de forma a existir $\delta > 0$ tal que $p + t\nu(p) \notin \overline{D}$, $t \in]0, \delta[$. Pela construção de $\nu(p)$ é simples verificar que ν é uma função contínua.

Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, uma função $X \colon S \to \mathbb{R}^n$ é chamada **campo vectorial em** S. Considere que X é C^1 e S é aberto. A **divergência de** X é a função escalar em S dada por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

Chama-se ao integral $\int_{\partial D} X \cdot \nu \, dv_{n-1}$ **fluxo de** X **por** ∂D.

Exercício 3.3.3. Dados $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $R > r > 0$, considere a 2-variedade de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - R\right)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,\ z > z_0\right\}.$$

1. Determine a normal unitária ν com terceira componente positiva em cada ponto de M.
2. Calcule o fluxo de $X(x, y, z) = (0, 1, 1)$ segundo ν, i.e. $\int_M X \cdot \nu$.
3. Repita a alínea anterior para

$$X(x, y, z) = (x + \arctan(y^2 + z^3), e^{z-x^3}, z^2 - z + 1).$$

Teorema 3.3.4 (Teorema da divergência ou teorema fundamental do cálculo para integrais múltiplos)**.** *Sejam um domínio regular $D \subset \mathbb{R}^n$ e um campo vectorial $X \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\int_D \operatorname{div} X = \int_{\partial D} X \cdot \nu \, dv_{n-1}.$$

Observação 3.3.5. No caso $n = 2$ este teorema é conhecido como teorema de Green (ver exercício 3.3.11), e para $n = 3$ como teorema de Gauss.

Exercício 3.3.6. Detenha-se por alguns momentos a apreciar o resultado do teorema da divergência.

Demonstração. Como ∂D é uma $(n-1)$-variedade, é localmente o gráfico de uma função C^1. I.e. para cada $x_0 \in \partial D$ existe um intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ tais que $\phi(\widetilde{x}) = (\widetilde{x}, f(\widetilde{x}))$, $\widetilde{x} \in V$, é uma $(n-1)$-parametrização. Por outro lado, para cada $x_0 \in D$ existe um intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in U \subset D$. A colecção destes intervalos abertos dos dois tipos acima cobrem $\overline{D}$. Como $\overline{D}$ é compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_i\}$ com

$$\overline{D} \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i.$$

Considere para cada $i = 1, \ldots, N$, uma função C^1, $\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, tal que:

- o seu suporte, i.e. o fecho de $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi_i(x) \neq 0\}$, está contido em U_i,
- $\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1$ para qualquer $x \in \overline{D}$.

Note que como φ_i é contínua, na fronteira de U_i temos $\varphi_i(x) = 0$.

Temos então,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} X \cdot \nu \, dv_{n-1} &= \int_{\partial D} \left(\sum_{i=1}^{N} \varphi_i \right) X \cdot \nu \, dv_{n-1} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial D \cap U_i} \varphi_i X \cdot \nu \, dv_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D \cap U_i} \varphi_i X_k \nu_k \, dv_{n-1}\end{aligned}$$

De forma semelhante obtemos

$$\int_D \operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{N} \int_{D \cap U_i} \operatorname{div}(\varphi_i X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \int_{D \cap U_i} \frac{\partial(\varphi_i X_k)}{\partial x_k}.$$

Vamos agora estudar os termos destas duas expressões para verificar que são iguais.

Se $U_i =]a_1, b_1[\times \cdots]a_n, b_n[\subset D$ então $\partial D \cap U_i = \emptyset$ e

$$\int_{\partial D \cap U_i} \varphi_i X_k \nu_k \, dv_{n-1} = 0.$$

Além disso, pelo teorema fundamental do cálculo integral,

$$\begin{aligned}\int_{D \cap U_i} \frac{\partial(\varphi_i X_k)}{\partial x_k} &= \int_a^b \cdots \int_{a_n}^{b_n} [\varphi_i X_k]_{x_k = a_k}^{x_k = b_k} \; dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_n \\ &= 0\end{aligned}$$

pois φ_i anula-se na fronteira de U_i.

Resta-nos estudar o caso $\partial D \cap U_i \neq \emptyset$. Para cada $k = 1, \ldots, n$, usamos a parametrização (após um reordenamento das coordenadas) $\phi \colon V \to U_i$ dada por

$$\phi(\widetilde{x}) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, f(\widetilde{x}), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

onde $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Então, $\partial D \cap U_i = \{x \in U_i \colon F(x) = 0\}$ com $F(x) = x_k - f(\widetilde{x})$, logo

$$\nu_k(x) = \frac{\frac{\partial F(x)}{\partial x_k}}{\|\nabla F(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}.$$

Usando o resultado obtido no exercício 3.2.7, obtemos

$$\int_{\partial D \cap U_i} \varphi_i X_k \nu_k \, dv_{n-1} = \int_V (\varphi_i \, X_k) \circ \phi.$$

Note que assumimos (sem perda de generalidade) que $F < 0$ em D. Isto significa que, considerando $U_i = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \widetilde{x} \in V, x_k \in I\}$ com $I =]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, temos

$$D \cap U_i = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \widetilde{x} \in V, \alpha < x_k < f(\widetilde{x})\}.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned}\int_{D\cap U_i} \frac{\partial(\varphi_i X_k)}{\partial x_k} &= \int_V \int_\alpha^{f(\widetilde{x})} \frac{\partial(\varphi_i X_k)}{\partial x_k}\, dx_k d\widetilde{x} \\ &= \int_V \left[\varphi_i X_k(x)\right]_{x_k=\alpha}^{x_k=f(\widetilde{x})} \\ &= \int_V (\varphi_i X_k)\circ\phi\end{aligned}$$

porque $\varphi_i(\alpha) = 0$.

Juntando todos os termos calculados acima, obtemos

$$\int_D \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = \int_{\partial D} X_k \nu_k \, dv_{n-1} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

□

Exercício 3.3.7. *** Prove o teorema acima para conjuntos $D \subset \mathbb{R}^n$ que verifiquem as condições $\operatorname{Int} \overline{D} = D$ e ∂D é uma $(n-1)$-variedade com cantos (i.e. é o fecho da união finita de variedades). *Sugestão:* Na demonstração anterior, adapte a cobertura de acordo com a união finita de variedades.

Exemplo 3.3.8. Seja $X(x,y,z) = (x,y,-2z)$ com $\operatorname{div} X(x,y,z) = 0$. O fluxo de X por S^2 é então dado por

$$\int_{S^2} X \cdot \nu \, dv_2 = \int_D \operatorname{div} X(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 0$$

onde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ é um domínio regular.

Exemplo 3.3.9. Considere

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = z^2+1, -1 < z < 3\}$$

e $X(x,y,z) = (x,y,-2z)$ novamente. Tomando

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 < z^2+1, -1 < z < 3\}$$

como domínio regular, temos $\partial D = S \cup V_1 \cup V_2$ onde

$$V_1 = \{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 < 10\} \quad \text{e} \quad V_2 = \{(x,y,-1) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 < 2\}.$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int_S X\cdot\nu\, dv_2 + \int_{V_1} X\cdot\nu\, dv_2 + \int_{V_2} X\cdot\nu\, dv_2 = \int_D \operatorname{div} X(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Calculando

$$\int_{V_1} X\cdot\nu\, dv_2 = \int_{V_1} X\cdot(0,0,1)\, dv_2 = \int_{V_1} -6\, dv_2 = -60\pi$$

e da mesma forma

$$\int_{V_2} X \cdot \nu \, dv_2 = \int_{V_1} X \cdot (0,0,-1) \, dv_2 = -4\pi,$$

obtemos

$$\int_S X \cdot \nu \, dv_2 = 64\pi.$$

Exercício 3.3.10. Considere o campo vectorial $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$X(x,y,z) = (xg(z), -yg(z), z),$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

1. Mostre que o fluxo de X através do cilindro

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4,\, 0 < z < 1\}$$

   segundo uma normal à sua escolha, não depende de g.

2. Mostre que X é um campo gradiente sse g é constante.

Exercício 3.3.11. *A partir do teorema da divergência, mostre o teorema de Green: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular, e $P, Q\colon A \to \mathbb{R}$ de classe C^1 num aberto $A \supset \overline{D}$. Então,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Sugestão: Note que usámos a seguinte notação para o integral de linha de um campo vectorial

$$\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial D} (P, Q) \cdot d\gamma$$

onde γ é um caminho que percorre ∂D no sentido anti-horário (directo). A notação faz sentido desde que se escreva $d\gamma = (dx, dy)$.

3.4 Integral de linha para campos vectoriais

Dada uma curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e uma parametrização $\gamma\colon]a,b[\to \mathbb{R}^n$, chamamos **caminho** a uma tal parametrização que seja extensível continuamente aos seus extremos a e b. Isto é, $\gamma(a^+)$ e $\gamma(b^-)$ existem e γ é C^0 em $[a,b]$ e C^1 em $]a,b[$.

Seja X um campo vectorial em $S \subset \mathbb{R}^n$. O **integral de linha de** X ao longo de uma curva Γ parametrizada pelo caminho $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, é definido como

$$\int_\Gamma X \cdot d\gamma = \int_a^b X \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Usa-se frequentemente a seguinte notação para o integral de linha:

$$\int_\Gamma X \cdot d\gamma = \int_\Gamma X_1 \, d\gamma_1 + \cdots + X_n \, d\gamma_n.$$

Caso Γ seja uma curva fechada (i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$), é costume escrever-se o integral de linha como

$$\oint_\Gamma X \cdot d\gamma.$$

Proposição 3.4.1. *Considere dois caminhos γ_1 e γ_2 que parametrizam a mesma C^1-curva Γ. Então,*

$$\int_\Gamma X \cdot d\gamma_1 = \sigma \int_\Gamma X \cdot d\gamma_2$$

onde $\sigma = 1$ se os caminhos têm o mesmo sentido e $\sigma = -1$ caso contrário.

Exercício 3.4.2. Prove a Proposição 3.4.1.

Exemplo 3.4.3. Considere os caminhos $\gamma_1(t) = (t, t)$, $\gamma_2(t) = (t, t^2)$ e $\gamma_3(t) = (1 - t, 1 - t)$, todos definidos para $t \in [0, 1]$. As curvas geradas são respectivamente Γ_1, Γ_2 e $\Gamma_3 = \Gamma_1$. Sendo $X(x, y) = (1, x)$, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} X \cdot d\gamma_1 = \int_0^1 X(t, t) \cdot (1, 1) \, dt = \frac{3}{2}, \qquad \int_{\Gamma_2} X \cdot d\gamma_2 = \frac{5}{3}.$$

Finalmente, notando que γ_3 tem o sentido inverso de γ_1, $\int_{\Gamma_1} X \cdot d\gamma_3 = -\frac{3}{2}$.

Exercício 3.4.4.

1. Calcule o integral do campo vectorial X ao longo do caminho indicado:
   (a) $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, na curva $y = x^2$ entre $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.
   (b) $X(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, na curva $y = 1 - |1 - x|$ entre $(0, 0)$ e $(2, 0)$.
   (c) $X(x, y) = (2a - y, x)$, no caminho $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$.
   (d) $X(x, y) = (x + y, x - y)$, na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ numa volta no sentido anti-horário.
   (e) $X(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, y)$, num segmento de recta entre $(1, 0, 2)$ e $(3, 4, 1)$.
   (f) $X(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, no caminho $\gamma(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $0 \le t \le 1$.

Teorema 3.4.5 (Fundamental do cálculo de integrais de linha)**.** *Seja* $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1*,* $S \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e conexo, e* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *um caminho* C^1 *com* $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset S$*. Então,*

$$\int_\Gamma \nabla\varphi \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Demonstração. Note que $(\varphi \circ \gamma)' = \nabla\varphi \circ \gamma \cdot \gamma'$. Assim,

$$\int_\Gamma \nabla\varphi \cdot d\gamma = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t)\, dt.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo integral em $\mathbb{R}$ obtemos o resultado. □

Observação 3.4.6. Note que se Γ é uma curva fechada, então $\oint_\Gamma \nabla\varphi \cdot d\gamma = 0$.

Exemplo 3.4.7. Considere o campo vectorial $X(x,y,z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$ e o caminho $\gamma(t) = (5\cos t, 5\sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi/4]$. Queremos descobrir se existe uma função escalar φ tal que $X = \nabla\varphi$. Se assim for, então o cálculo do integral de linha de X simplifica-se usando o teorema anterior. Temos de encontrar φ que verifique

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = yze^{xyz} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = xze^{xyz} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = xye^{xyz}. \end{cases}$$

Primitivando a primeira equação relativamente a x, obtemos

$$\varphi(x,y,z) = e^{xyz} + C(y,z),$$

onde C é uma função que não depende de x. Aplicando esta solução φ à segunda equação obtemos $\varphi(x,y,z) = e^{xyz} + C(z)$ onde descobrimos que C não depende de y. Finalmente, usando esta forma de φ na terceira equação, deduzimos que C é constante. Logo,

$$\int_\Gamma X \cdot d\gamma = \varphi \circ \gamma(\pi/4) - \varphi \circ \gamma(0) = e^{25\pi^2/32} - 1.$$

Exercício 3.4.8. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (y^2, 2xy + z, y + 5)$.

1. Determine se F é o gradiente de uma função escalar $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
2. Calcule $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$ para o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ e a curva $\Gamma = \gamma([0,\pi])$.

Exercício 3.4.9. Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

1. o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.
2. o integral do campo vectorial $X(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de Γ.

Exercício 3.4.10. Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$X(x, y, z) = \left(-\frac{2x}{(x^2 - y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2 - y^2)^2}, z^2 \right).$$

1. Mostre que X é o gradiente de uma função escalar.
2. Calcule o integral do campo vectorial X ao longo de Γ.

3.5 Campos vectoriais fechados

Como vimos acima, o Teorema 3.4.5 simplifica significativamente o cálculo dos integrais de linha. Vamos agora concentrar-nos na obtenção de critérios para determinar se um campo vectorial é o gradiente de uma função, de forma a podermos aplicar o teorema.

Teorema 3.5.1. *Seja um campo vectorial $X\colon S \to \mathbb{R}^n$ contínuo em $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Então X é um gradiente de uma função sse*

$$\oint_\Gamma X \cdot d\gamma = 0$$

para qualquer caminho fechado γ seccionalmente C^1, onde Γ é a curva parametrizada por γ.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Teorema 3.4.5.

($\Leftarrow$) Fixando um ponto $x_0 \in S$ definimos a função $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma_x} X \cdot d\gamma,$$

onde Γ_x é uma curva seccionalmente C^1 em S com extremos x_0 e x, e γ uma sua parametrização. Vamos mostrar que $X = \nabla\varphi$. Para isso temos que calcular

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(x + se_i) - \varphi(x)}{s}.$$

Considere o segmento de recta $\widetilde{\Gamma}_s$ entre x e $x + se_i$ parametrizado por $\widetilde{\gamma}(t) = x + te_i$ com t entre 0 e s e $|s|$ suficientemente pequeno tal que $\widetilde{\Gamma}_s \subset S$. Note que $\widetilde{\gamma}'(t) = e_i$. Temos então que

$$\varphi(x + se_i) - \varphi(x) - \int_{\widetilde{\Gamma}_s} X \cdot d\widetilde{\gamma} = 0,$$

pois corresponde ao integral sobre a curva fechada $\Gamma_x \cup \Gamma_{x+se_i} \cup \widetilde{\Gamma}_s$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \int_0^s X(\widetilde{\gamma}(t)) \cdot \widetilde{\gamma}'(t)\, dt \\ &= X_i(x).\end{aligned}$$

□

O teorema anterior não permite obter um critério útil para determinar se um campo vectorial é um gradiente, pois seria necessário verificar a condição de integral nulo para todas as curvas fechadas.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um campo vectorial $X \in C^1(S, \mathbb{R}^n)$ é um **campo fechado** se

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x), \quad x \in S, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Observação 3.5.2. Se temos um gradiente $X = \nabla \varphi$ para uma função $\varphi \in C^2(S)$, então

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

onde usámos o teorema de Schwarz. Assim, X é fechado.

Queremos agora saber em que condições fechado implica gradiente. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é um **conjunto em estrela** sse existe $p \in S$ tal que qualquer segmento de recta entre p e outro ponto de S está contido em S.

Teorema 3.5.3. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto e em estrela, e X um campo vectorial C^1 em S. Então, X é um gradiente em S sse é fechado em S.*

Demonstração. Basta provar que fechado implica gradiente para conjuntos em estrela. Considere a função $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ de classe C^1 dada por

$$\varphi(x) = \int_0^1 X(\gamma(t)) \cdot x\, dt.$$

onde $\gamma(t) = (1-t)p + tx$ é o caminho que gera o segmento unindo p a x. Queremos mostrar que se X é fechado, então $X = \nabla \varphi$. Temos assim, usando a regra de Leibniz (Teorema 6.5.8) para trocar o integral com a derivada,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[X_j \circ \gamma(t)\,(x_j - p_j)\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n (\nabla X_j \circ \gamma(t)\, t(x_j - p_j)\, e_i) + X_i \circ \gamma(t)\right] dt\end{aligned}$$

Agora,

$$\nabla X_j\, e_i = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

porque X é fechado. Finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 (t\nabla X_i \circ \gamma(t) \cdot x + X_i \circ \gamma(t))\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tX_i \circ \gamma(t))\, dt \\ &= X_i \circ \gamma(1) = X_i(x).\end{aligned}$$

□

O teorema anterior ainda é verdadeiro para espaços mais gerais. De facto, deformações contínuas de espaços em estrela também têm a mesma propriedade dos campos fechados serem gradientes. Para obtermos esse resultado necessitamos de introduzir o conceito de homotopia.

Uma **homotopia** em S entre dois caminhos fechados $\gamma_1, \gamma_2 \colon [a,b] \to S$ é uma função C^0, $H \colon [0,1] \times [a,b] \to S$, tal que $H(s,\cdot)$ é um caminho fechado e

$$H(0,\cdot) = \gamma_1 \quad \text{e} \quad H(1,\cdot) = \gamma_2.$$

Dois caminhos fechados são homotópicos em S sse existe uma homotopia entre eles.

Teorema 3.5.4. *Seja X fechado e γ_1, γ_2 caminhos fechados seccionalmente regulares e homotópicos, que geram as curvas Γ_1, Γ_2, respectivamente. Então,*

$$\oint_{\Gamma_1} X \cdot d\gamma_1 = \oint_{\Gamma_2} X \cdot d\gamma_2.$$

Exercício 3.5.5. *** Prove o teorema anterior. *Sugestão*: Visite a biblioteca.

Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexo** sse é conexo e todos os caminhos fechados em S são homotópicos a um ponto (caminho constante).

Teorema 3.5.6. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto e simplesmente conexo, e X um campo vectorial C^1 em S. Então, X é um gradiente em S sse é fechado em S.*

Demonstração. Falta apenas provar que fechado implica gradiente. Como S é simplesmente conexo, pelo teorema anterior o integral de linha de X ao longo de uma qualquer curva fechada é igual ao mesmo integral sobre um ponto. Logo, o integral sobre qualquer curva fechada anula-se e podemos aplicar o Teorema 3.5.1. $\square$

Capítulo 4

Medida

O integral de Riemann é usado para definir o volume de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ como

$$\operatorname{vol}(A) = \int_A 1 = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_A,$$

onde $\mathcal{X}_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a **função característica de** A dada por

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Porém, se $\mathcal{X}_A$ não é integrável à Riemann, então não podemos calcular o volume de A. Há muitos conjuntos interessantes nessa situação. Por exemplo, para $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ obtemos a função característica $\mathcal{X}_A$ que toma o valor 1 nos números irracionais em $[0,1]$. Ora esta função não é integrável à Riemann (demonstre-o), pelo que não podemos calcular o volume de A.

Neste capítulo iremos generalizar o volume a um novo conceito chamado medida de um conjunto. A medida deverá ser uma função que a cada conjunto corresponda um valor não-negativo. Além disso, deverá satisfazer a propriedade de aditividade, a medida de conjuntos disjuntos (não se intersectam) é igual à soma das suas medidas.

4.1 σ-álgebras

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Comecemos por introduzir a colecção $\mathcal{P}(\Omega)$ de todos os subconjuntos de Ω,

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \colon A \subset \Omega\}.$$

Note que qualquer subconjunto de Ω é um elemento de $\mathcal{P}(\Omega)$, i.e. $A \subset \Omega$ sse $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Por exemplo $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$. Para simplificar a notação, sempre que não houver ambiguidade escrevemos simplesmente $\mathcal{P}$. O conjunto complementar de $A \in \mathcal{P}$ em Ω é definido como $A^c = \Omega \setminus A$.

Uma colecção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, i.e. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, é uma **$\sigma$-álgebra de** Ω sse

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Se $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$.

Chamamos **conjuntos mensuráveis** aos elementos de uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ e **espaço mensurável** ao par $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exercício 4.1.1. Decida se $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de Ω onde:

1. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
3. $\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}^-_0, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+_0, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}\big\}$, $\Omega = \mathbb{R}$.

Exercício 4.1.2. Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ uma σ-álgebra. Mostre que $\emptyset \in \mathcal{F}$ e que se $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$.

Exercício 4.1.3. Seja Ω um conjunto finito com $\#\Omega = n$. Calcule $\#\mathcal{P}(\Omega)$. *Sugestão*: Estabeleça uma bijecção entre $\mathcal{P}(\Omega)$ e o espaço $\{v \in \mathbb{R}^n \colon v_i \in \{0,1\}\}$.

4.2 Medidas

Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de Ω. Uma aplicação $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ é uma **medida** em Ω relativamente a $\mathcal{F}$ sse

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ é aditiva para a união numerável de conjuntos mensuráveis disjuntos, i.e.

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k), \quad A_k \in \mathcal{F} \quad \text{com} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Note que tomamos a aritmética em $[0,+\infty]$ considerando-se $+\infty + \infty = +\infty$ e $a + \infty = +\infty$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Uma **medida exterior** em Ω relativamente a $\mathcal{F}$ é uma aplicação $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e é sub-aditiva:

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k \mu(A_k), \quad A_k \in \mathcal{F}.$$

Note que a aditividade implica a sub-aditividade, mas o contrário não se verifica.

Se $\mu(\Omega) = 1$, dizemos que μ é uma **medida de probabilidade**.

Exercício 4.2.1. Seja μ uma medida numa σ-álgebra $\mathcal{F}$. Mostre que na definição de medida, a condição $\mu(\emptyset) = 0$ pode ser substituída pela existência de um conjunto $E \in \mathcal{F}$ com medida finita, $\mu(E) < +\infty$. *Sugestão*: Repare que $E \cup \emptyset = E$ e $E \cap \emptyset = \emptyset$.

Um conjunto mensurável $A \in \mathcal{F}$ tem **medida total** sse $\mu(A^c) = 0$. O **suporte da medida** μ, denominado $\operatorname{supp}(\mu)$, é o menor conjunto fechado com medida total. Uma proposição diz-se válida em **μ-quase todo o ponto (μ-q.t.p.)**, ou em μ-quase toda a parte, se é válida num conjunto com medida μ total.

Exemplo 4.2.2. (Medida de Dirac) Seja a σ-álgebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $a \in \Omega$ e a aplicação $\mu\colon \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Temos que μ é aditiva, pois se $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, são disjuntos, então apenas podemos ter duas alternativas: existe um único $j \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_j$ e nesse caso $\mu(\bigcup_k A_k) = 1 = \mu(A_j) = \sum_k \mu(A_k)$, ou $a \notin A_k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assim $\mu(\bigcup_k A_k) = 0 = \sum_k \mu(A_k)$. Logo, μ é uma medida de probabilidade. Temos também que $\operatorname{supp}(\mu) = \{a\}$.

Exercício 4.2.3. (Medida de contagem) Considerando $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, mostre que a aplicação de contagem dos elementos de $A \in \mathcal{F}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A, & \#A < +\infty \\ +\infty, & \text{c.c,} \end{cases}$$

é uma medida. Como $\emptyset$ é o único conjunto com medida nula, Ω é o único conjunto com medida total. Assim, $\operatorname{supp}(\mu) = \Omega$.

Exercício 4.2.4. Seja $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a aplicação dada por

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathbb{R}) = 2, \quad \mu(X) = 1 \quad \text{se} \quad X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

Determine se μ é sub-aditiva numerável e aditiva numerável.

Exercício 4.2.5. Mostre que se μ_1, μ_2 são medidas e $\alpha, \beta \geq 0$, então $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ também é uma medida.

Proposição 4.2.6. *Seja uma medida μ numa σ-álgebra $\mathcal{F}$ e $A, B \in \mathcal{F}$.*

1. *Se $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Se $A \subset B$ e $\mu(A) < +\infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Demonstração. Note que $B = A \cup (B \setminus A)$ é uma união entre conjuntos disjuntos, i.e. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Logo, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$. Finalmente, se $\mu(A) < +\infty$ temos que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Note que se $\mu(A) = +\infty$ então $\mu(B) = +\infty$ não sendo possível determinar o valor de $\mu(B \setminus A)$. □

Exemplo 4.2.7. Seja uma medida μ numa σ-álgebra $\mathcal{F}$. Para quaisquer conjuntos mensuráveis $A, B \in \mathcal{F}$, $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Exercício 4.2.8. Seja uma medida μ numa σ-álgebra $\mathcal{F}$. Para quaisquer conjuntos mensuráveis $A, B, C \in \mathcal{F}$, encontre uma fórmula para $\mu(A \cup B \cup C)$ em termos das medidas de cada um dos conjuntos e das suas intersecções.

Proposição 4.2.9. *Seja uma medida μ numa σ-álgebra $\mathcal{F}$ e $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Se $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, então $\mu(\bigcup_k A_k) = \lim \mu(A_k)$.*
2. *Se $\dots \subset A_2 \subset A_1$ e $\mu(A_1) < +\infty$, então $\mu(\bigcap_k A_k) = \lim \mu(A_k)$.*

Demonstração.

1. Se existe i tal que $\mu(A_i) = +\infty$, então $\mu(A_k) = +\infty$ para $k \geq i$. Logo, $\lim \mu(A_k) = +\infty$. Por outro lado, como $A_i \subset \bigcup_k A_k$, temos que $\mu(\bigcup_k A_k) = +\infty$. Resta considerar o caso em que $\mu(A_k) < +\infty$ para qualquer k. Seja $A_0 = \emptyset$ e $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, $k \geq 1$, uma sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois. Então, $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k$ e $\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_k A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_k B_k\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

2. Como $\mu(A_1) < +\infty$ qualquer subconjunto de A_1 também tem medida finita. Note que

$$\bigcap_k A_k = \left(\bigcup_k A_k^c\right)^c = A_1 \setminus \bigcup_k C_k,$$

onde $C_k = A_k^c \cap A_1$. Temos ainda que $C_k \subset C_{k+1}$. Então, pelo caso anterior,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_k A_k\right) &= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_k C_k\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} (\mu(A_1) - \mu(C_k)) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

□

Exemplo 4.2.10. Considere a medida de contagem μ. Seja $A_n = \{n, n+1, \dots\}$. Assim, $A = \bigcap_n A_n = \emptyset$ e $A_{n+1} \subset A_n$. Porém, $\mu(A_n) = +\infty$ não converge para $\mu(A) = 0$. A proposição anterior não se aplica pois $\mu(A_1) = +\infty$.

4.3 Medida de Lebesgue

Nesta secção apresentamos um exemplo de medida que generaliza o volume em $\Omega = \mathbb{R}^n$. Iremos primeiro definir uma medida exterior, que será medida se considerarmos uma σ-álgebra apropriada.

4.3.1 Medida exterior de Lebesgue

Um intervalo I de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto com a forma

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

com $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots n$. O volume de I é dado por

$$\operatorname{vol}(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Note que temos a seguinte propriedade do volume da união numerável de intervalos I_i,

$$\operatorname{vol}\left(\bigcup_i I_i\right) \leq \sum_i \operatorname{vol}(I_i).$$

Uma **cobertura de** $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto finito ou numerável de intervalos I_i de $\mathbb{R}^n$ (representado na forma $\{I_i\}_{i\in K}$, onde o conjunto dos índices $K \subset \mathbb{N}$ é finito ou numerável) tal que

$$A \subset \bigcup_{i\in K} I_i.$$

Representamos a colecção de todas as coberturas de A por $\mathcal{C}(A)$.

Exemplo 4.3.1. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Então $C = \{[-1,1] \times [-1,1]\}$ é uma cobertura de A, assim como $C' = \{[-2,0] \times [-2,0], [-2,0] \times [0,2], [0,2] \times [-2,0], [0,2] \times [0,2]\}$. I.e. $C, C' \in \mathcal{C}(A)$.

O **volume de uma cobertura** $C = \{I_i\}_{i\in K} \in \mathcal{C}(A)$ é definido como a soma dos volumes dos seus intervalos,

$$\mathrm{V}(C) = \sum_{i\in K} \mathrm{vol}(I_i).$$

Exemplo 4.3.2. Considerando as coberturas do exemplo anterior, $\mathrm{V}(C) = 4$ e $\mathrm{V}(C') = 16$.

Estamos interessados em coberturas de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cujo volume seja o mais pequeno possível. Como $\mathrm{V}(C) \in [0, +\infty]$, podemos definir a seguinte aplicação dada por

$$m \colon \mathcal{P} \to [0, +\infty]$$
$$m(A) = \inf_{C\in\mathcal{C}(A)} \mathrm{V}(C).$$

Note que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe sempre uma cobertura $C \in \mathcal{C}(A)$ tal que

$$m(A) \leq \mathrm{V}(C) < m(A) + \varepsilon.$$

Exemplo 4.3.3.

1. Como $\{\emptyset\} \in \mathcal{C}(\emptyset)$, então $0 \leq m(\emptyset) \leq \mathrm{vol}(\emptyset) = 0$. Isto é, $m(\emptyset) = 0$.

2. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}^n$. Como $\{I\}$ é uma cobertura de I, temos que $m(I) \leq \mathrm{vol}(I)$. Qualquer outra cobertura C tem que incluir I, logo $\mathrm{V}(C) \geq \mathrm{vol}(I)$. Assim, $m(I) \geq \mathrm{vol}(I)$. Finalmente, $m(I) = \mathrm{vol}(I)$.

3. Como $A = \{a\}$ é um intervalo com volume nulo para qualquer $a \in \mathbb{R}^n$, $m(\{a\}) = 0$.

Proposição 4.3.4. *m é uma medida exterior relativamente a $\mathcal{P}$.*

Observação 4.3.5. Chamamos a m **medida exterior de Lebesgue**.

Demonstração. Resta mostrar que m é sub-aditiva pois $m(\emptyset) = 0$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, se $C_k \in \mathcal{C}(A_k)$ tal que $\mathrm{V}(C_k) < m(A_k) + \varepsilon/2^k$, então a união de todas as coberturas, $\bigcup_k C_k$, é uma cobertura de $A = \bigcup_k A_k$ e

$$m(A) \leq \mathrm{V}\left(\bigcup_k C_k\right).$$

A cobertura $\bigcup_k C_k$ é dada pela união dos intervalos de todas as coberturas C_k's. O seu volume verifica

$$\mathrm{V}\left(\bigcup_k C_k\right) \leq \sum_k \mathrm{V}(C_k) < \sum_k m(A_k) + \varepsilon \sum_k \frac{1}{2^k}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário e $\sum_k \frac{1}{2^k}$ é convergente, $m(A) \leq \sum_k m(A_k)$. □

Exemplo 4.3.6. Sendo $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ um conjunto numerável de pontos, $m(A) = 0$ pois

$$m(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m(\{a_i\}) = 0.$$

Em particular, como os conjuntos $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{Q}^n$ são numeráveis, $m(\mathbb{Z}^n) = m(\mathbb{Q}^n) = 0$.

Considere a translação de A por x dada por $A + x = \{a + x : a \in A\}$.

Proposição 4.3.7.

1. *Se $A \subset B$, $m(A) \leq m(B)$. (Monotonia)*
2. *$m(A + x) = m(A)$. (Invariância por translações)*

Demonstração.

1. Qualquer cobertura de B também cobre A, i.e. $\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$. Logo, $m(A) \leq m(B)$.
2. Para qualquer cobertura de A na forma $\{I_i\}_i$, $\{I_i + x\}_i$ é uma cobertura de $A + x$ e $\mathrm{vol}(I + x) = \mathrm{vol}(I)$. Logo, $m(A) = m(A + x)$.

□

Proposição 4.3.8.

1. *Se $A \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$, existe um aberto V tal que $A \subset V$ e $m(V) \leq m(A) + \varepsilon$.*

2. *Se $A \in \mathcal{P}$, existe uma sucessão de abertos V_j, $j \in \mathbb{N}$, tais que $A \subset \bigcap_j V_j$ e $m(\bigcap_j V_j) = m(A)$.*

Demonstração.

1. Pela definição de m, existe uma cobertura $C = \{I_i\}_i$ de A tal que
$$m(A) \leq \mathrm{V}(C) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Sejam
$$\begin{aligned} I_i &= [a_{1,i}, b_{1,i}] \times \cdots \times [a_{n,i}, b_{n,i}], \\ J_i &=]a_{1,i} - \delta_i, b_{1,i} + \delta_i[\times \cdots \times]a_{n,i} - \delta_i, b_{n,i} + \delta_i[\end{aligned}$$
com $I_i \subset J_i$, e δ_i a escolher de forma a
$$\sum_i \mathrm{vol}(J_i \setminus I_i) = \sum_i (\mathrm{vol}\, J_i - \mathrm{vol}\, I_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Assim, $V = \bigcup_i J_i$ é aberto, $A \subset V$ e
$$m(V) \leq \sum_i \mathrm{vol}(J_i) < \sum_i \mathrm{vol}(I_i) + \frac{\varepsilon}{2} < m(A) + \varepsilon.$$

2. Para cada $j \in \mathbb{N}$, escolhendo $\varepsilon_j = 1/j$ existe V_j aberto tal que $A \subset V_j$ e $m(V_j) < m(A) + \varepsilon_j$. Logo, $A \subset \bigcap_j V_j \subset V_k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e
$$m(A) \leq m\left(\bigcap_j V_j\right) \leq m(V_k) < m(A) + \frac{1}{k}.$$
Finalmente, fazendo $k \to +\infty$, $m(\bigcap_j V_j) = m(A)$.

□

4.3.2 Conjuntos mensuráveis à Lebesgue

Na secção anterior mostrámos que m é sub-aditiva, i.e. m é uma medida exterior. De facto, vamos mostrar que é aditiva sendo assim uma medida. Esse não é o caso para quaisquer subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, apenas para os contidos numa σ-álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$, como iremos ver de seguida.

Um conjunto $A \in \mathcal{P}$ pertence a $\mathcal{M}$ sse para qualquer $B \in \mathcal{P}$,
$$m(B) = m(B \cap A) + m(B \cap A^c).$$

Observação 4.3.9.

1. Pela sub-aditividade de m temos que $m(B) \leq m(B \cap A) + m(B \cap A^c)$ pois $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$. Assim, $A \in \mathcal{M}$ sse
$$m(B) \geq m(B \cap A) + m(B \cap A^c), \quad B \in \mathcal{P}.$$

2. Se $A_1 \in \mathcal{M}$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, pela definição de conjunto mensurável para $B = A_1 \cup A_2$ temos
$$\begin{aligned} m(A_1 \cup A_2) &= m((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + m((A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) \\ &= m(A_1) + m(A_2). \end{aligned}$$
Por indução, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ que se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, então verifica-se a propriedade da aditividade finita:
$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

3. Um conjunto E não pertence a $\mathcal{M}$ sse existe $B \in \mathcal{P}$ para o qual $m(B) < m(B \cap E) + m(B \cap E^c)$. Isto significa que existem conjuntos para os quais a propriedade da aditividade finita não se verifica para m.

Teorema 4.3.10. *$\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra.*

Observação 4.3.11. Aos elementos de $\mathcal{M}$ chamamos **conjuntos mensuráveis à Lebesgue**.

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{P}$.

1. Como $m(\mathbb{R}^n \cap B) + m(\emptyset \cap B) = m(B) + 0 = m(B)$, temos que $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$.

2. Se $A \in \mathcal{M}$, como $m(B) = m(B \cap A) + m(B \cap A^c) = m(B \cap (A^c)^c) + m(B \cap A^c)$, logo $A^c \in \mathcal{M}$.

3. Vamos primeiro mostrar que $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ implica $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$. Escrevendo $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2)$ e $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$, temos
$$\begin{aligned} m(B \cap (A_1 \cup A_2)) &= m((B \cap A_1) \cup (B \cap A_1^c \cap A_2)) \\ &\leq m(B \cap A_1) + m(B \cap A_1^c \cap A_2) \end{aligned}$$
e
$$m(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) = m(B \cap A_1^c \cap A_2^c).$$

Somando as duas relações acima obtemos:

$$\begin{aligned}m(B\cap(A_1\cup A_2))+m(B\cap(A_1\cup A_2)^c) \leq & m(B\cap A_1)\\ &+m(B\cap A_1^c\cap A_2)\\ &+m(B\cap A_1^c\cap A_2^c)\\ =&m(B\cap A_1)+m(B\cap A_1^c)\\ =&m(B).\end{aligned}$$

Por indução, a união finita de elementos de $\mathcal{M}$ também está em $\mathcal{M}$. Resta mostrar que o mesmo se verifica para a união numerável.

Seja $F_1 = A_1$ e $F_k = A_k \setminus (A_{k-1}\cup\cdots\cup A_1)$, $k > 1$. É simples verificar que os F_k são disjuntos, $\bigcup_k F_k = \bigcup_k A_k$ e que $F_k \in \mathcal{M}$. Pela mensurabilidade de uniões finitas e o facto de $(\bigcup_k F_k)^c \subset (\bigcup_{k=1}^n F_k)^c$, obtemos para qualquer $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}m(B) &= m\left(B\cap\bigcup_{k=1}^n F_k\right)+m\left(B\cap\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right)^c\right)\\ &\geq \sum_{k=1}^n m(B\cap F_k)+m\left(B\cap\left(\bigcup_k F_k\right)^c\right).\end{aligned}$$

Tomando o limite $n\to+\infty$,

$$m(B)\geq m\left(B\cap\bigcup_k F_k\right)+m\left(B\cap\left(\bigcup_k F_k\right)^c\right).$$

Ou seja, $\bigcup_k F_k \in \mathcal{M}$.

□

Proposição 4.3.12.

1. *Se $m(A) = 0$, então $A \in \mathcal{M}$.*
2. *Se I é um intervalo de $\mathbb{R}^n$, então $I \in \mathcal{M}$.*

Demonstração.

1. Se $m(A) = 0$, então para qualquer $B \in \mathcal{P}$ temos que $m(A\cap B) \leq m(A) = 0$ pois $A\cap B\subset A$ pela monotonia de m. Por outro lado, $m(A^c\cap B)\leq m(B)$. Logo, $m(B)\geq m(A\cap B)+m(A^c\cap B)$.

2. Seja $B\in\mathcal{P}$ e $\varepsilon>0$. Considere a cobertura $C=\{I_i\}_i\in\mathcal{C}(B)$ tal que

$$m(B)\leq \mathrm{V}(C)<m(B)+\varepsilon.$$

Escolhendo $C' = \{I_i \cap I\} \in \mathcal{C}(B \cap I)$, temos $m(B \cap I) \leq \mathrm{V}(C')$. Finalmente, para cobrirmos $B \cap I^c$ tomamos todos os intervalos que constituem cada $I_i \cap I^c$, formando uma cobertura $C'' \in \mathcal{C}(B \cap I^c)$. Assim, $m(B \cap I^c) \leq \mathrm{V}(C'')$. Logo, como $\mathrm{V}(C) = \mathrm{V}(C') + \mathrm{V}(C'') \geq m(B \cap I) + m(B \cap I^c)$, obtemos

$$m(B \cap I) + m(B \cap I^c) < m(B) + \varepsilon,$$

onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

□

Exercício 4.3.13. Mostre que se A_k, $k \in \mathbb{N}$, são conjuntos mensuráveis à Lebesgue, então

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

também é mensurável à Lebesgue.

4.3.3 Medida de Lebesgue

Teorema 4.3.14. *m é uma medida relativamente a $\mathcal{M}$.*

Observação 4.3.15. Chamamos a m relativamente a $\mathcal{M}$ **medida de Lebesgue**.

Demonstração. Como m é sub-aditiva relativamente a $\mathcal{P}$, para mostrar que m é aditiva relativamente a $\mathcal{M}$ basta provar que $m(\bigcup_k A_k) \geq \sum_k m(A_k)$ para uma sucessão de conjuntos $A_k \in \mathcal{M}$ disjuntos dois a dois. De $A_k \in \mathcal{M}$ sabemos que $\sum_{k=1}^n m(A_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$. Usando o facto de $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ e a propriedade de monotonia de m, chegamos a

$$\sum_{k=1}^n m(A_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

Finalmente, tomando o limite $n \to +\infty$ obtemos o resultado. □

Exemplo 4.3.16. Sejam $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$ e $C = A \setminus B$. Assim, $m(A) = 1$, $m(B) = 0$ e $m(C) = 1$. Ou seja, o conjunto dos irracionais entre 0 e 1 tem medida de Lebesgue 1.

Exemplo 4.3.17. Considere $A = [0, +\infty[$ e $B = [0, 10[\subset A$. Logo, $m(A) = +\infty$, $m(B) = 10 \leq m(A)$ e $m(B \cup A^c) = m(B) + m(A^c) = 10 + \infty = +\infty$.

Exercício 4.3.18. Indique quais das seguintes proposições são válidas m-q.t.p:

1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está numa recta de declive irracional que passa na origem.
2. $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} n\sin(x/n) \in \mathbb{Q}$.
3. A função $f(x, y, z) = \lim_{n\to+\infty}[1+\|(x, y, z)\|^n]^{-1}$ é contínua em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 4.3.19. (Conjunto não mensurável à Lebesgue) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $A_\alpha = \alpha + \mathbb{Q}$.

1. Determine $\cup_{\alpha\in\mathbb{R}} A_\alpha$ e $m(A_\alpha)$.
2. Mostre que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ sse $A_\alpha \neq A_\beta$ sse $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$.
3. *Considere o conjunto $E \subset [0, 1]$ constituído por um único elemento a_α de cada A_α distinto[1]. Seja então $E_n = (q_n + E) \cap [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, onde q_n representa uma sucessão que ordena os racionais.
   (a) Determine $\cup_n E_n$, $m(\cup_n E_n)$ e $m(E_n) - m(E)$.
   (b) Mostre que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.
   Sugestão: Suponha que existe $x \in E_i \cap E_j$.
   (c) Calcule $\sum_n m(E_n)$ e compare com $m(\cup_n E_n)$. Conclua que E não é mensurável à Lebesgue, i.e. $E \notin \mathcal{M}$.

Exercício 4.3.20. Dê um exemplo de um conjunto limitado de medida de Lebesgue nula cuja fronteira não tenha medida nula.

Exercício 4.3.21. (Conjunto de Cantor)

Considere $A_0 = [0, 1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Obtemos assim $A_1 = I_0 \cup I_2$ onde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Repita o processo para I_0 e I_2, obtendo $A_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ onde $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, etc. Continuando, temos uma sucessão de conjuntos A_n.

1. Prove que o chamado conjunto de Cantor dos terços $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é não vazio.
2. Prove que A tem medida de Lebesgue nula.
3. *Prove que A não é numerável.

   Sugestão: Escreva $x \in [0, 1]$ na base 3 na forma $x = (0.a_1a_2\ldots)_3$ onde
   $$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$
   e $a_k \in \{0, 1, 2\}$. Note que $x \in A$ sse $a_k \in \{0, 2\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

[1] Este conjunto existe pela aplicação do axioma da escolha.

Exercício 4.3.22. *Mostre que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ têm a mesma cardinalidade. *Sugestão*: Use o facto de o conjunto de Cantor ter a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ e medida nula.

A proposição seguinte descreve a relação entre a medida de Lebesgue e o volume obtido pelo integral de Riemann.

Proposição 4.3.23. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $m(A) = \operatorname{vol}(A)$.*

Demonstração. Note que sendo A um conjunto aberto é uma união numerável de intervalos disjuntos I_i, $i \in \mathbb{N}$. Assim, $A \in \mathcal{M}$ e $m(A) = \sum_i m(I_i) = \sum_i \operatorname{vol}(I_i) = \operatorname{vol}(\bigcup_i I_i) = \operatorname{vol}(A)$. □

4.4 Geração de σ-álgebras

Considere um conjunto de índices Φ, i.e. um conjunto qualquer.

Teorema 4.4.1. *Se $\mathcal{F}_\alpha$ é uma σ-álgebra, $\alpha \in \Phi$, então $\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha\in\Phi} \mathcal{F}_\alpha$ é também uma σ-álgebra.*

Observação 4.4.2. Note que neste resultado não é necessário termos apenas um conjunto numerável de σ-álgebras (uma sucessão).

Demonstração.

1. Como para qualquer α temos que $\mathbb{R}^n \in \mathcal{F}_\alpha$, então $\mathbb{R}^n \in \mathcal{F}$.

2. Seja $E \in \mathcal{F}$. Assim, $E \in \mathcal{F}_\alpha$ para qualquer α. Logo, $E^c \in \mathcal{F}_\alpha$ e $E^c \in \mathcal{F}$.

3. Se $E_k \in \mathcal{F}$, temos $E_k \in \mathcal{F}_\alpha$ para qualquer α. Logo, $\bigcup_k E_k \in \mathcal{F}_\alpha$ e $\bigcup_k E_k \in \mathcal{F}$.

□

Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$. A **σ-álgebra gerada por** $\mathcal{A}$ é a intersecção de todas as σ-álgebras contendo todos os conjuntos em $\mathcal{A}$,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{F} \text{ é } \sigma\text{-álgebra} \colon \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}.$$

Assim, $\sigma(\mathcal{A})$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{A}$ (i.e. está contida em todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{A}$).

Exemplo 4.4.3.

1. Seja $A \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{A} = \{A\} \subset \mathcal{P}$. Qualquer σ-álgebra contendo $\mathcal{A}$ tem que conter obrigatoriamente os conjuntos $\emptyset$, Ω, A e A^c. Ora estes já constituem uma σ-álgebra, que é então $\sigma(\mathcal{A})$.

2. Considere agora dois conjuntos diferentes $A, B \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Assim,

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{A}) = \{&\emptyset, \Omega, A, B, A^c, B^c,\\ &A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, (A \cup B)^c, (A \cup B^c)^c, (A^c \cup B)^c,\\ &B^c \cup (A \cup B^c)^c, (B^c \cup (A \cup B^c)^c)^c,\\ &((A \cup B^c)^c) \cup ((A^c \cup B)^c), (((A \cup B^c)^c) \cup ((A^c \cup B)^c))^c\}\\ = \{&\emptyset, \Omega, A, B, A^c, B^c,\\ &A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, A^c \cap B^c, B \setminus A, A \setminus B,\\ &(A \cap B)^c, A \cap B,\\ &(A \cup B) \setminus (A \cap B), (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)\}\,.\end{aligned}$$

Exercício 4.4.4. Mostre que

1. se $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}$, então $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$.

2. $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$ para qualquer $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$.

Exercício 4.4.5. Seja Ω um conjunto finito com $\#\Omega = n$ e cujos elementos são $\omega_1, \dots, \omega_n$. Mostre que $\mathcal{A} = \{\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}\}$ gera $\mathcal{P}(\Omega)$.

4.5 Conjuntos de Borel

Se considerarmos $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ como a colecção de todos os intervalos de $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\mathcal{I} = \{I \subset \mathbb{R}^n \colon I \text{ é um intervalo de } \mathbb{R}^n\},$$

então

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{I})$$

é a chamada **σ-álgebra de Borel**. Os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ são os **conjuntos de Borel**, conjuntos mensuráveis à Borel ou Borelianos.

Exemplo 4.5.1. Como um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um intervalo (degenerado), qualquer conjunto numerável é de Borel.

Exemplo 4.5.2. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então $A = \bigcup_k I_k$ para uma sucessão de intervalos I_k. Logo, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 4.5.3. Mostre que $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[\colon a \in \mathbb{R}\}$ gera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Observação 4.5.4. Como $\mathcal{M}$ contém todos os intervalos (Proposição 4.3.12), pelo Exercício 4.4.4 obtemos $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{M}$. Existem exemplos não triviais de conjuntos em $\mathcal{M}$ que não estão em $\mathcal{B}$. Dessa forma, $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$. Temos assim

$$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}.$$

4.6 Espaços de medida

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de Ω e $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ uma medida. Definimos assim um **espaço de medida** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Um conjunto $A \in \mathcal{P}$ diz-se de **medida nula** se é subconjunto de um conjunto mensurável $B \in \mathcal{F}$ com $\mu(B) = 0$. Um espaço de medida é **completo** sse qualquer conjunto de medida nula é mensurável (logo, também tem medida igual a zero pela monotonia da medida).

Um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um **espaço de probabilidade** sse μ é uma medida de probabilidade, i.e. $\mu(\Omega) = 1$.

Observação 4.6.1. O espaço de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ é completo, mas o espaço de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m)$ não é completo. Note ainda que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}, m)$ não é um espaço de medida.

Definindo a operação

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

seja $\bar{\mathcal{F}}$ a colecção de conjuntos $A \in \mathcal{P}$ para os quais existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \Delta B$ tem medida nula. Considere a aplicação $\bar{\mu}\colon \bar{\mathcal{F}} \to [0, +\infty]$ a extensão de μ a $\bar{\mathcal{F}}$ tal que $\bar{\mu}(A) = \mu(B)$ onde $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \Delta B$ tem medida nula.

Proposição 4.6.2.

1. *$\bar{\mathcal{F}}$ é uma σ-álgebra.*
2. *$\bar{\mu}$ é uma medida.*
3. *$(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ é um espaço de medida completo.*

Exercício 4.6.3. Demonstre a proposição anterior.

Exemplo 4.6.4. Considere $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Podemos definir uma medida fazendo $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\mathbb{R}) = \infty$. Temos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ assim definido é um espaço de medida completo.

Exemplo 4.6.5. $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{M}$.

Exercício 4.6.6. Decida se $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}, \delta_a)$ é um espaço de medida completo, onde δ_a é a medida de Dirac para um dado $a \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.6.7. Considere $B \in \mathcal{M}$ tal que $m(B) > 0$. Temos então que $\mathcal{M}_B = \{A \cap B \colon A \in \mathcal{M}\}$ é uma σ-álgebra, e $(B, \mathcal{M}_B, m)$ é um espaço de medida completo.

Exercício 4.6.8. Mostre que o espaço de medida $(B, \mathcal{M}_B, m_B)$ com $m(B) > 0$ e $m_B(A) = m(A)/m(B)$ para qualquer $A \in \mathcal{M}_B$, é um espaço de probabilidade.

Exercício 4.6.9. Seja $\Omega = \{0,1\}^n \subset \mathbb{R}^n$, i.e. os elementos de Ω são vectores em $\mathbb{R}^n$ com componentes 0 ou 1. Considere a medida $\mu \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ definida para cada $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ por $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$.

Dados $a_1, \dots a_m \in \{0,1\}$ com $1 \leq m \leq n$, definimos

$$A_{a_1,\dots,a_m} = \{\omega \in \Omega \colon \omega_i = a_i,\, i = 1, \dots, m\}$$

e $\mathcal{A}_m = \{A_{a_1,\dots,a_m} \colon a_i \in \{0,1\}\}$.

1. Mostre que μ é uma medida de probabilidade.
2. Calcule $\mu(A_{a_1,\dots,a_m})$.
3. Determine a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_2$.
4. *Mostre que o cardinal da σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_m$ é 2^{2^m}.

Exercício 4.6.10. * Podemos escrever um número $x \in [0,1]$ em base 3 como

$$x = (0.a_1a_2a_3\dots)_3 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$

onde $a_k \in \{0,1,2\}$. Considere a função de Cantor $f \colon [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2^k},$$

onde $N = \inf\{k \colon a_k = 1\}$ e $b_k = a_k/2$ se $k < N$ e $b_N = a_N = 1$, com $x = (0.a_1a_2a_3\dots)_3$ (note que podemos ter $N = +\infty$).

Ou seja, consideramos os algarismos da representação em base 3 de x até aparecer um 1. Por exemplo, se $x = (0.02002212001)_3$, então $N = 7$ e temos os algarismos 020022. Dividimos por 2 cada um de forma a obter os b_k's 010011 e definimos $b_7 = 1$. Finalmente, $f(x)$ é dado como o número cuja representação em base 2 é $(0.0100111)_2$. Mostre que:

1. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
2. f é crescente em $[0,1]$ e constante em cada subintervalo de $[0,1] \setminus A$, onde
$$A = \{x = (0.a_1a_2\dots)_3 \in [0,1] \colon a_k \in \{0,2\}\}.$$

3. ** f é contínua em $[0,1]$.
4. $f' = 0$ m-q.t.p. *Sugestão*: Calcule a medida de A.
5. $f(1-x) = 1 - f(x)$ e $2f(x/3) = f(x)$.
6. Tente desenhar o gráfico de f. *Sugestão*: Use um computador.

Capítulo 5

Funções mensuráveis

Neste capítulo introduzimos o conceito de função mensurável, que corresponde à classe de funções para as quais iremos definir o integral de Lebesgue.

5.1 Funções mensuráveis

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de Ω e $A \in \mathcal{F}$. Uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ é **$\mathcal{F}$-mensurável** sse $f^{-1}(I) \in \mathcal{F}$ para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sempre que não houver dúvida quanto à σ-álgebra usada, abreviaremos para função mensurável. Se escolhermos $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ dizemos que f é **mensurável à Lebesgue**.

Observação 5.1.1. Recorde as seguintes propriedades (de simples verificação) da pré-imagem de uma função f:

- $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.
- $f^{-1}(\bigcup_k A_k) = \bigcup_k f^{-1}(A_k)$.
- $f^{-1}(\bigcap_k A_k) = \bigcap_k f^{-1}(A_k)$.

Teorema 5.1.2. *As seguintes proposições são equivalentes:*

1. *f é $\mathcal{F}$-mensurável.*
2. *$f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{F}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.*
3. *$f^{-1}([a, +\infty[) \in \mathcal{F}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.*
4. *$f^{-1}(] - \infty, a[) \in \mathcal{F}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.*
5. *$f^{-1}(] - \infty, a]) \in \mathcal{F}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pela definição, 1) implica todas as outras proposições.

Para provar que 2) é equivalente a 5) comecemos por considerar $I =]-\infty, a]$. Assim, $f^{-1}(I) = f^{-1}(]a, +\infty[^c) = f^{-1}(]a, +\infty[)^c \in \mathcal{F}$. No caso 4), para $I =]-\infty, a[= \bigcup_k]-\infty, a-\frac{1}{k}]$ temos que $f^{-1}(I) = \bigcup_k f^{-1}(]-\infty, a-\frac{1}{k}]) \in \mathcal{F}$. Dinalmente, para 3), se $I = [a, +\infty[$ usamos a mesma ideia.

Falta provar que 2) implica 1). Seja $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \colon f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{B}$. Temos assim que $\mathcal{I} = \{]a, +\infty[\colon a \in \mathbb{R}\}$ está contido em $\mathcal{A}$. Se mostrarmos que $\mathcal{A}$ é uma σ-algebra (Exercício!), sabendo que $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}$, temos que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Ou seja, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e f é mensurável. □

Exemplo 5.1.3. Seja $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ constante. Então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & a < c \\ \emptyset, & a \geq c. \end{cases}$$

Como $\emptyset, \mathbb{R}^n$ pertencem a qualquer σ-álgebra $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$, f é $\mathcal{F}$-mensurável.

Observação 5.1.4.

1. Qualquer função é $\mathcal{P}$-mensurável.
2. Sejam as σ-álgebras $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ que satisfazem $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Se f é $\mathcal{F}_1$-mensurável, então também é $\mathcal{F}_2$-mensurável.

Exemplo 5.1.5. Seja $f \in C^0(A, \mathbb{R})$ com $A \in \mathcal{B}$. Como a pré-imagem de um aberto por uma função contínua é ainda um aberto, $f^{-1}(]a, +\infty[)$ é aberto e é $\mathcal{B}$-mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, f é também mensurável à Lebesgue.

Exemplo 5.1.6. Seja $\mathcal{X}_A$ a função característica de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Temos assim

$$\mathcal{X}_A^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \mathbb{R}, & a < 0 \\ A, & 0 \leq a < 1 \\ \emptyset, & a \geq 1. \end{cases}$$

Logo, $\mathcal{X}_A$ é $\mathcal{F}$-mensurável sse $A \in \mathcal{F}$. Note que podemos assim ter um exemplo de uma função não mensurável bastando escolher A não mensurável.

Exercício 5.1.7. Indique se, para uma função mensurável f, o conjunto de nível $f^{-1}(a)$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.1.8. Determine se qualquer função monótona $f \colon A \to \mathbb{R}$ com $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, é mensurável.

5.2 Propriedades das funções mensuráveis

Considere uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.2.1. *Sejam f e g funções mensuráveis em $A \subset \mathbb{R}^n$. Então $f+g$ e $f.g$ também são mensuráveis.*

Observação 5.2.2. Este teorema implica que o espaço das funções mensuráveis é linear.

Demonstração. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua e $h\colon A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = F(f(x), g(x))$. Como F é contínua então $F^{-1}(]a, +\infty[)$ é aberto, logo a união numerável de intervalos abertos. Escrevendo $F^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_k I_k \times J_k$ onde I_k e J_k são intervalos abertos em $\mathbb{R}$, temos que $h^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_k (f^{-1}(I_k) \cap g^{-1}(J_k)) \in \mathcal{F}$. Ou seja, h é mensurável.

Aplicando este resultado a $F(u, v) = u+v$ e a $F(u, v) = u.v$ completamos a demonstração. □

Exercício 5.2.3. Verifique as seguintes proposições para uma sucessão de funções $f_k\colon A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^n$:

1. Se $g = \sup_{k\geq 1} f_k$, temos que
$$g^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_{k\geq 1} f_k^{-1}(]a, +\infty[)$$
para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

2. Se $g = \inf_{k\geq 1} f_k$, temos que
$$g^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}(]a, +\infty[)$$
para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.2.4. *Sejam f_k, $k \in \mathbb{N}$, funções mensuráveis em $A \subset \mathbb{R}^n$. Então, $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\limsup_k f_k$, $\liminf_k f_k$ e $\lim_k f_k$ (se existir) são funções mensuráveis.*

Demonstração. Seja $g = \sup_k f_k$. Assim,
$$g^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_k f_k^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{F}.$$

Considerando agora $g = \inf_k f_k$, temos
$$g^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcap_k f_k^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{F}.$$

Sabendo que o supremo do conjunto dos sublimites de $f_k(x)$ é dado por
$$\limsup_k f_k(x) = \inf_{k\geq 1} H_n(x) \quad \text{onde} \quad H_k(x) = \sup_{m\geq k} f_m(x),$$

dos casos anteriores temos que $\limsup_k f_k$ é mensurável. A mesma ideia para $\liminf_k f_k$.

Finalmente, se $\lim_k f_k$ existe é igual a $\limsup_k f_k = \liminf_k f_k$ que vimos ser mensurável. □

Exemplo 5.2.5. Considere $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ com

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/k[\\ 0, & x \in [1/k, 1]. \end{cases}$$

Temos então que

$$\sup_k f_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1[\\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

e

$$\inf_k f_k(x) = \lim_k f_k(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Teorema 5.2.6. *Considere um espaço de medida completo* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Seja* $A \in \mathcal{F}$ *e* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *mensurável. Se* $g\colon A \to \mathbb{R}$ *verifica* $f = g$ μ*-q.t.p, então* g *é mensurável.*

Demonstração. Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Logo $h = 0$ num conjunto com medida total relativamente a μ. Se $a \geq 0$, $h^{-1}(]a, +\infty[)$ tem medida nula logo é um conjunto mensurável pelo espaço ser completo. Por outro lado, se $a < 0$, $h^{-1}(]a, +\infty[) = A \setminus B$ com $\mu(B) = 0$. Assim $B \in \mathcal{F}$ e $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$. Logo, h é mensurável e $g = f - h$ também. □

Observação 5.2.7. Note que o teorema anterior não se aplica caso $\mathcal{F}$ seja a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, mas aplica-se a $\mathcal{M}$.

Exercício 5.2.8. Seja $f\colon E \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável com $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) < +\infty$. Considerando a função $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = \mu\left(\{y \in E\colon f(y) > x\}\right),$$

determine:

1. $\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$
2. $\lim_{x\to-\infty} \omega(x)$
3. a monotonia de ω
4. $\lim_{x\to a^+} \omega(x)$
5. $\lim_{x\to a^-} \omega(x)$
6. se $\mu(f^{-1}(\{a\})) = 0$ implica que ω é contínua em a.

5.3 Funções simples

Para duas funções $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ com $A \subset \Omega$, iremos escrever $f \leq g$ sse $f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \in A$. De forma semelhante iremos usar o símbolo $\geq$ entre funções.

Uma função $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é **simples** relativamente à σ-álgebra $\mathcal{F}$ de Ω sse

1. $\varphi \geq 0$,
2. $\varphi(\Omega) = \{a_1, \ldots, a_N\}$ é finito,
3. $A_i = \varphi^{-1}(a_i) \in \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq N$.

Observação 5.3.1.

1. Os conjuntos A_i's são disjuntos dois a dois.
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
3. Uma função simples é dada por

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{X}_{A_i}(x).$$

   Ou seja, a função característica é uma função simples e uma função simples é uma combinação linear finita com coeficientes não negativos de funções características definidas em conjuntos disjuntos.

Observação 5.3.2. Podemos incluir o caso $+\infty \in \varphi(\Omega)$. Ou seja, φ pode tomar valores infinitos. Se $\mu(\varphi^{-1}(\{+\infty\})) = 0$, então φ é finita μ-q.t.p. Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = +\infty$ é finita m-q.t.p.

Exercício 5.3.3. Mostre que uma função simples é mensurável.

Exercício 5.3.4. Mostre que se $\alpha \geq 0$ e φ, ψ são funções simples, então $\varphi + \psi$ e $\alpha\varphi$ também são funções simples.

Proposição 5.3.5. *Seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ mensurável e $f \geq 0$. Então, existe uma sucessão φ_k de funções simples tal que*

- $0 \leq \varphi_k \leq f$ *em A para qualquer $k \in \mathbb{N}$,*
- $\lim_k \varphi_k = f$ *em A.*

Demonstração. Seja

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ \frac{[2^k f(x)]}{2^k}, & 0 \leq f(x) < k \\ k, & f(x) \geq k, \end{cases}$$

onde $[x] = \inf\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}$ é a parte inteira de x. Vamos mostrar que esta sucessão de funções satisfaz as condições requeridas.

Em primeiro lugar $\varphi_k \geq 0$ pois $f \geq 0$. Para $x \in f^{-1}([0,k[)$,

$$\frac{2^k f(x) - 1}{2^k} \leq \varphi_k(x) \leq \frac{2^k f(x)}{2^k} = f(x) < k.$$

Logo, $\varphi_k \leq f$ e fazendo $k \to +\infty$ obtemos $\lim_k \varphi_k = f$.

Para verificar que $\varphi_k(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto finito basta notar que $\varphi_k(x)$ é sempre igual a 0, k ou um inteiro menor que $k2^k/2^k = k$. Logo, para cada k, a imagem de φ_k não tem mais do que $k+1$ elementos.

Observe que $\varphi_k^{-1}(\{k\}) = f^{-1}([k,+\infty[)$ e $\varphi_k^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cup A^c$ são mensuráveis. Finalmente, se $a = m2^{-k} \in \varphi_k(\mathbb{R}^n)$ com $0 < m < k2^k$ inteiro, então $\varphi_k^{-1}(a) = f^{-1}([m2^{-k}, (m+1)2^{-k}[)$ também é mensurável. $\square$

Capítulo 6

Integral de Lebesgue

Neste capítulo iremos definir uma generalização do integral de Riemann baseado na medida de conjuntos.

6.1 Integral de Lebesgue de funções simples

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $E \in \mathcal{F}$. Começamos por definir o integral da função característica de $A \in \mathcal{F}$ como a medida de A, i.e.

$$\int_E \mathcal{X}_A \, d\mu = \mu(A \cap E).$$

É simples generalizar o integral para o caso de uma função simples φ dada por

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{X}_{A_i},$$

onde os conjuntos $A_i \in \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq N$, são disjuntos dois a dois e $a_i \geq 0$. O **integral de Lebesgue da função simples** φ em E relativamente à medida μ é definido por

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \mu(A_i \cap E).$$

Observação 6.1.1. Para o cálculo de $\int_E \varphi \, d\mu$ assumimos que $0 \times \infty = 0$. Isto é, se para um dado i temos $a_i = 0$, não importa a medida de A_i (podendo ser infinita) pois consideramos sempre o termo $a_i \mu(A_i \cap E) = 0$. Da mesma forma, se φ toma o valor $+\infty$, ou seja $a_i = +\infty$ para algum i, e $\mu(A_i) = 0$, então este termo no integral também se anula.

Observação 6.1.2. Note que

$$\int_E \varphi\, d\mu = \int_\Omega \varphi\, \mathcal{X}_E\, d\mu$$

onde $\varphi\, \mathcal{X}_E$ é também uma função simples.

Exemplo 6.1.3. $\int_E \mathcal{X}_A\, d\mu = \int_{A\cap E} d\mu = \mu(A\cap E)$.

Exemplo 6.1.4. $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}\, dm = m(\mathbb{Q}) = 0$. Recorde que $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ não é integrável à Riemnann.

Exemplo 6.1.5. Seja $\varphi_1(x) = [x]$ a parte inteira[1] de x e $\varphi_2(x) = [x^2]$. Então, $\int_{[0,10]} \varphi_1\, dm = 0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ e $\int_{[0,2]} \varphi_2\, dm = 5 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Exercício 6.1.6. Indique quais as funções simples e para essas calcule os integrais relativamente à medida de Lebesgue:

1. $f = \chi_{[1,+\infty[} + \chi_{]-\infty,-1[}$
2. $f = 2\chi_{[0,+\infty[} - 3\chi_{]1,+\infty[}$
3. $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x, & x^{-1} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2,\ 0 \leq y \leq 1 \\ -3, & 1/2 < x < 1,\ 0 \leq y \leq 1/2 \\ 2, & 1/2 < x < 1,\ 1/2 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
6. $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k k^{-1} \chi_{]0,1/k[}$
7. $f(x) = [x]\chi_{[-100,100]}$
8. $f(x,y) = ([x] + [y])\chi_{[0,2]\times[0,2]}(x,y)$
9. $f(x,y) = \left(\left[\frac{3}{1+x}\right] \chi_{]0,2[}(y) - \left[\frac{2}{1+y}\right] \chi_{]0,3[}(x)\right) \chi_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y)$

Proposição 6.1.7. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *um espaço de medida e* φ *uma função simples. Então,*

$$\nu(E) = \int_E \varphi\, d\mu, \quad E \in \mathcal{F}$$

é uma medida.

[1] $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}$.

Demonstração. Começamos por verificar a primeira condição para ν ser medida: $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset \varphi\, d\mu = \sum_i a_i \mu(\emptyset) = 0$.

Seja $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$ com E_k disjuntos dois a dois. Logo, usando a aditividade de μ, i.e. $\mu(E \cap A_i) = \sum_{k\geq 1} \mu(E_k \cap A_i)$, obtemos a aditividade de ν:

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(E \cap A_i) = \sum_{k\geq 1} \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_{k\geq 1} \nu(E_k).$$

□

Proposição 6.1.8. *Sejam φ, ψ funções simples e $\alpha \geq 0$. Então,*

1. $\int_E (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu + \int_E \psi\, d\mu$.
2. $\int_E (\alpha\varphi)\, d\mu = \alpha \int_E \varphi\, d\mu$.
3. *Se $\varphi \leq \psi$, então $\int_E \varphi\, d\mu \leq \int_E \psi\, d\mu$.*

Demonstração.

1. Escrevendo as imagens $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{a_1, \ldots, a_{N_1}\}$ e $\psi(\mathbb{R}^n) = \{b_1, \ldots, b_{N_2}\}$, temos $A_i = \varphi^{-1}(a_i)$ e $B_j = \psi^{-1}(b_j)$.

   Seja $A_{i,j} = A_i \cap B_j$. Logo, $\varphi + \psi$ é uma função simples com valor $a_i + b_j$ no conjunto $A_{i,j}$. I.e.

   $$\int_{A_{i,j}} (\varphi + \psi)\, d\mu = (a_i + b_j)\mu(A_{i,j}) = \int_{A_{i,j}} \varphi\, d\mu + \int_{A_{i,j}} \psi\, d\mu.$$

   Como os conjuntos $A_{i,j}$ são disjuntos, e $\int (\varphi + \psi)\, d\mu$ é uma medida (Proposição 6.1.7),

   $$\int_E (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i,j} \int_{A_{i,j}} (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu + \int_E \psi\, d\mu.$$

□

Exercício 6.1.9. Prove as restantes propriedades da proposição anterior.

6.2 Integral de Lebesgue de funções mensuráveis

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Dada uma função mensurável $f \geq 0$, definimos o suconjunto das funções simples que estão abaixo de f como

$$I(f) = \{\varphi \colon \varphi \leq f, \varphi \text{ é simples}\}.$$

É simples de verificar que se $f \leq g$, então $I(f) \subset I(g)$.

O **integral de Lebesgue de uma função mensurável não negativa** f em $E \in \mathcal{F}$ relativamente à medida μ é dado por

$$\int_E f\, d\mu = \sup_{\varphi \in I(f)} \int_E \varphi\, d\mu.$$

Note que $\int_E f\, d\mu$ existe sempre em $[0, +\infty]$. Usamos também a seguinte notação

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_E f\, d\mu.$$

Observação 6.2.1. Quando f é uma função simples, então temos que o supremo é atingido para $\varphi = f$. Logo, nesta situação a definição de integral de uma função simples coincide com a de integral de funções mensuráveis não negativas.

Seja $f\colon E \to \mathbb{R}$ mensurável e as funções não negativas em $E \in \mathcal{M}$ dadas por

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

Logo, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e também $|f(x)| = \max\{f^-(x), f^+(x)\}$.

Exercício 6.2.2. Mostre que se $f \leq g$, então $f^+ \leq g^+$ e $f^- \geq g^-$.

Dizemos que f é **integrável à Lebesgue** em E relativamente a μ sse

$$\int_E |f|\, d\mu < +\infty,$$

i.e. $\int_E f^+\, d\mu$ e $\int_E f^-\, d\mu$ são ambos finitos. Finalmente, definimos o **integral de Lebesgue** de f em E relativamente a μ como

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu.$$

Ao conjunto das funções mensuráveis integráveis à Lebesgue relativamente a μ chamamos $L^1(E, \mu)$.

Exercício 6.2.3. Prove para a medida de Dirac δ_a (ver Exemplo 4.2.2) que:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\delta_a = \varphi(a)$ onde φ é uma função simples.

2. $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\delta_a = f(a)$, onde f é uma função qualquer (note que é mensurável pois a σ-álgebra associada a δ_a é $\mathcal{P}$).

6.2.1 Propriedades do integral de Lebesgue

Proposição 6.2.4. *Sejam $f, g \in L^1(E, \mu)$ com $E \in \mathcal{F}$.*

1. *Se $f \leq g$ μ-q.t.p., então $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.*
2. *Se $A \subset E$ com $A \in \mathcal{F}$, então $\int_A |f|\, d\mu \leq \int_E |f|\, d\mu$.*
3. *Se $\mu(A) = 0$, então $\int_A f\, d\mu = 0$.*
4. *Se $A, B \in \mathcal{F}$ são disjuntos, então $\int_{A\cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$.*
5. *Se $f = 0$ μ-q.t.p., então $\int_E f\, d\mu = 0$.*

Demonstração.

1. Note que $f^+ \leq g^+$ implica $I(f^+) \subset I(g^+)$. Ou seja, $\int_E f^+\, d\mu \leq \int_E g^+\, d\mu$. Por outro lado, $g^- \leq f^-$ e $I(g^-) \subset I(f^-)$. Assim, $\int_E f^-\, d\mu \geq \int_E g^-\, d\mu$ e $\int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu \leq \int_E g^+\, d\mu - \int_E g^-\, d\mu$.
2. Note que $\int_A |f|\, d\mu = \int_E |f|\mathcal{X}_A\, d\mu$. Como $|f|\mathcal{X}_A \leq |f|$, pela propriedade anterior, $\int_E |f|\mathcal{X}_A\, d\mu \leq \int_E |f|\, d\mu$.
3. Note que para qualquer função simples $\int \varphi\, d\mu = \sum_i a_i \mu(A_i \cap A) = 0$. Logo $\int_A |f|\, d\mu = 0$.
4. Comecemos por verificar que para qualquer $C \in \mathcal{F}$, $\mu((A\cup B)\cap C) = \mu((A\cap C)\cup(B\cap C)) = \mu(A\cap C) + \mu(B\cap C)$ pois A e B são disjuntos. Para qualquer função simples

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} \varphi\, d\mu &= \sum_i a_i \mu(A_i \cap (A\cup B)) \\ &= \sum_i a_i (\mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \cap B)) \\ &= \int_A \varphi\, d\mu + \int_B \varphi\, d\mu.\end{aligned}$$

   Deste modo,

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\, d\mu &\leq \sup_{\varphi\in I(f)} \int_A \varphi\, d\mu + \sup_{\varphi\in I(f)} \int_B \varphi\, d\mu \\ &= \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_A \varphi_A \, d\mu + \int_B \varphi_B \, d\mu &= \int_A (\varphi_A \mathcal{X}_A + \varphi_B \mathcal{X}_B) \, d\mu \\ &\quad + \int_B (\varphi_A \mathcal{X}_A + \varphi_B \mathcal{X}_B) \, d\mu \\ &= \int_{A \cup B} (\varphi_A \mathcal{X}_A + \varphi_B \mathcal{X}_B) \, d\mu \\ &\leq \int_{A \cup B} f \, d\mu.\end{aligned}$$

porque A e B são disjuntos e $(\varphi_A \mathcal{X}_A + \varphi_B \mathcal{X}_B) \in I(f)$. Tirando os supremos à esquerda obtemos $\int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu \leq \int_{A \cup B} f \, d\mu$.

5. Temos $0 \leq f \leq 0$ q.t.p. Logo, pela primeira propriedade, $\int_E 0 \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu \leq \int_E 0 \, d\mu$. O resultado segue do facto do integral de 0 ser igual a 0.

□

6.3 Teorema da convergência monótona

Queremos estudar integrais de sucessões de funções e a sua convergência. Isto é, queremos determinar quando podemos comutar o integral com o limite. Note que o próprio integral é definido como um limite, o que torna esta análise delicada. Começamos com um resultado preliminar que nos será útil mais tarde.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Lema 6.3.1 (Fatou)**.** *Seja a sucessão de funções mensuráveis $f_k \colon E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{F}$, $f_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Então,*

$$\int_E \liminf_{k \to +\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k \to +\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

Demonstração. Vamos mostrar o resultado primeiro para funções simples $\varphi \leq \liminf_{k \to +\infty} f_k$. Seja $0 < c < 1$ e a sucessão crescente $g_m = \inf_{k \geq m} f_k$. Então, para m suficientemente grande temos $c\varphi < g_m \leq \liminf f_n$.

Seja $A_m = \{x \in E \colon g_m(x) \geq c\varphi(x)\}$. Assim, $A_m \subset A_{m+1}$ e $\bigcup_m A_m = E$. Além disso,

$$\int_{A_m} c\varphi \, d\mu \leq \int_{A_m} g_m \, d\mu \leq \int_{A_m} f_k \leq \int_E f_k \, d\mu$$

para qualquer $k \geq m$. Finalmente, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e $c \in]0,1[$,

$$\int_{A_m} c\varphi \, d\mu \leq \liminf_{k \to +\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

Logo, $\int_E \varphi \, d\mu \leq \liminf_{k \to +\infty} \int_E f_k \, d\mu$.

Para demonstrar o teorema basta notar que pela definição de integral $\int_E \liminf_{k \to +\infty} f_k \, d\mu = \sup\{\int_E \varphi \, d\mu \colon \varphi \leq \liminf_{k \to +\infty} f\}$. □

Exemplo 6.3.2. Considere $f_k = \mathcal{X}_{[k,k+1]}$. Temos assim que $\int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = 1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Logo $\liminf_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = 1$. Por outro lado, $\liminf_{k \to +\infty} f_k(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Então, $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{k \to +\infty} f_k \, dm = 0$. O que está de acordo com o teorema.

Segue-se o primeiro resultado para limites e não apenas liminf.

Teorema 6.3.3 (Convergência monótona)**.** *Seja a sucessão de funções mensuráveis $f_k \colon E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, convergente pontualmente q.t.p., tal que*

$$0 \leq f_k \leq \lim_{k \to +\infty} f_k \quad q.t.p.$$

Então,

$$\int_E \lim_{k \to +\infty} f_k \, d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

Demonstração. Note que $\int_E f_k \leq \int_E \lim_{k \to +\infty} f_k$. Então,

$$\limsup_{k \to +\infty} \int_E f_k \leq \int_E \lim_{k \to +\infty} f_k = \int_E \liminf_{k \to +\infty} f_k \leq \liminf_{k \to +\infty} \int_E f_k$$

onde usámos o lema de Fatou. Como o $\liminf$ é sempre menor que o $\limsup$, têm que ser iguais ao lim. □

6.3.1 Mais propriedades do integral de Lebesgue

Teorema 6.3.4. *Se $f \geq 0$ é $\mathcal{F}$-mensurável, então*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{F},$$

define uma medida.

Observação 6.3.5. Nas condições do teorema anterior escrevemos $d\nu = f \, d\mu$.

Demonstração. Em primeiro lugar, usando a Proposição 6.2.4, $\nu(\emptyset) = 0$ pois $\mu(\emptyset) = 0$. Como $f \geq 0$, então $\int_A f \, d\mu \geq \int_A 0 \, d\mu = 0$, novamente pela

Proposição 6.2.4. Falta verificar a propriedade de aditividade numerável para ν.

Seja $A_k \in \mathcal{F}$ uma sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois e $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$. Então,

$$\nu(B) = \int_B f\,d\mu = \int_\Omega f\mathcal{X}_B\,d\mu.$$

Se definirmos $g_k = f\mathcal{X}_{B_k}$ com $B_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, temos $g_k \leq f\mathcal{X}_B = \lim_{k\to+\infty} g_k$. Pelo teorema da convergência monótona, $\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} g_k\,d\mu = \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega g_k\,d\mu$. Ou seja,

$$\int_\Omega f\mathcal{X}_B\,d\mu = \lim_{k\to+\infty}\int_{B_k} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty}\int_{A_i} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty}\nu(A_i)$$

onde usámos $\int_{B_k} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{k}\int_{A_i} f\,d\mu$ obtida por indução da propriedade descrita na Proposição 6.2.4. $\square$

Exercício 6.3.6. Nas condições do teorema anterior mostre que para g $\mathcal{F}$-mensurável,

$$\int_A g\,d\nu = \int_A g\,f\,d\mu.$$

Proposição 6.3.7. *Se $f,g \in L^1(E,\mu)$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f+\beta g \in L^1(E,\mu)$ e*

$$\int_E (\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_E f\,d\mu + \beta\int_E g\,d\mu.$$

Demonstração. Vamos provar esta proposição primeiro para funções simples. Depois escolhemos sucessões de funções simples convergentes para f^+ e g^+ e usamos o teorema da convergência monótona para mostrar a linearidade do integral de funções não-negativas. A mesma ideia aplicada a f^- e g^- completa a prova.

Sejam φ e ψ funções simples tais que $\varphi(E) = \{a_1,\dots,a_N\}$, $\psi(E) = \{b_1,\dots,b_M\}$ e $A_i = \varphi^{-1}(a_i)$, $B_j = \psi^{-1}(b_j)$. Então,

$$\begin{aligned}\int_E(\varphi+\psi)\,d\mu &= \sum_{i,j}(a_i+b_i)\mu(A_i\cap B_j\cap E)\\ &= \sum_i a_i\sum_j \mu(A_i\cap B_j\cap E) + \sum_j b_j\sum_i \mu(A_i\cap B_j\cap E).\end{aligned}$$

Note que $\sum_j \mu(A_i\cap B_j\cap E) = \mu(A_i\cap E)$ pois os conjuntos B_j são disjuntos dois a dois e a sua união é o conjunto total. O mesmo para $\sum_i \mu(A_i\cap B_j\cap E) = \mu(B_j\cap E)$. Assim,

$$\int_E(\varphi+\psi)\,d\mu = \int_E\varphi\,d\mu + \int_E\psi\,d\mu.$$

Consideramos agora sucessões de funções simples $\varphi_k \nearrow f^+$ e $\psi_k \nearrow g^+$. Deste modo, pelo teorema da convergência monótona,

$$\begin{aligned}
\int_E (f^+ + g^+)\, d\mu &= \int_E \lim_{k\to+\infty} (\varphi_k + \psi_k)\, d\mu \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_E (\varphi_k + \psi_k)\, d\mu \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_E \varphi_k\, d\mu + \lim_{k\to+\infty} \int_E \psi_k\, d\mu \\
&= \int_E \lim_{k\to+\infty} \varphi_k\, d\mu + \int_E \lim_{k\to+\infty} \psi_k\, d\mu \\
&= \int_E f^+\, d\mu + \int_E g^+\, d\mu.
\end{aligned}$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. A função $\alpha\varphi$ é simples se $\alpha \geq 0$ e é simples verificar que $\int_E \alpha\varphi\, d\mu = \alpha \int_E \varphi\, d\mu$. Se $\alpha < 0$ por definição temos

$$\int_E \alpha\varphi\, d\mu = -\int_E |\alpha|\varphi\, d\mu = -|\alpha| \int_E \varphi\, d\mu = \alpha \int_E \varphi\, d\mu.$$

Por outro lado, novamente pelo teorema da convergência monótona, podemos provar facilmente que

$$\int_E \alpha f^+\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu.$$

Os restantes casos deixam-se como exercício para o leitor. □

Proposição 6.3.8. *Seja $f \in L^1(E, \mu)$.*

1. *Se $\int_A f\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu$ para qualquer $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset E$, então $f \leq g$ μ-q.t.p.*

2. *Se $\int_E f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ para qualquer $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset E$, então $f = g$ μ-q.t.p.*

3. *$(\inf_E f)\, \mu(E) \leq \int_E f\, d\mu \leq (\sup_E f)\, \mu(E)$.*

4. *$|\int_E f\, d\mu| \leq \int_E |f|\, d\mu$.*

5. *Se $f \geq 0$ e $\int_E f\, d\mu = 0$, então $f = 0$ μ-q.t.p em E.*

Exercício 6.3.9. Demonstre a proposição anterior usando o teorema da convergência monótona.

6.4 Relação com o integral de Riemann

Nesta secção consideramos somente integrais relativos à medida de Lebesgue m.

Teorema 6.4.1. *Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ limitada num intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$ compacto.*

1. *f é integrável à Riemann em I sse f é contínua m-q.t.p. em I.*

2. *Se f é integrável à Riemann em I, então $f \in L^1(I, m)$ e os integrais de Lebesgue e de Riemann são iguais:*

$$\int_E f\,dm = \int_E f(x)\,dx.$$

Demonstração.

1. Vamos tratar o caso $f \geq 0$, sendo o caso geral apenas uma aplicação deste resultado. Definimos a oscilação de f num conjunto $A \subset I$ como $\operatorname{osc}(A) = \sup_A f - \inf_A f \geq 0$, e a oscilação num ponto $x \in I$ é dada por $\operatorname{osc}(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{osc}(V_\delta(x))$, onde $V_\delta(x) = \{y \in I \colon \|y - x\| < \delta\}$. Temos então que f é contínua em x sse $\operatorname{osc}(x) = 0$.

   Seja $D = \{x \in I \colon \operatorname{osc}(x) > 0\}$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Queremos mostrar que f é integrável à Riemann sse $m(D) = 0$.

   Sendo $m(D) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição de I composta por uma colecção finita de intervalos com interiores disjuntos I_i e J_j tais que: $D \subset \bigcup_i I_i$, $\sum_i \operatorname{vol}(I_i) < \varepsilon$ (possível pois $m(D) = 0$), e $\operatorname{osc}(J_j) < \varepsilon$ (possível porque f é contínua em cada J_j). Recorde que $\bar{\int}_A f \leq \sup_A f \ \operatorname{vol}(A)$ e $\underline{\int}_A f \geq \inf_A f \ \operatorname{vol}(A)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\bar{\int}_I f - \underline{\int}_I f &= \sum_i \left(\bar{\int}_{I_i} f - \underline{\int}_{I_i} f \right) + \sum_j \left(\bar{\int}_{J_j} f - \underline{\int}_{J_j} f \right) \\
&\leq \sum_i \operatorname{osc}(I_i) \ \operatorname{vol}(I_i) + \sum_j \operatorname{osc}(J_j) \ \operatorname{vol}(J_j) \\
&\leq \operatorname{osc}(I) \sum_i \operatorname{vol}(I_i) + \max_j \operatorname{osc}(J_j) \sum_j \operatorname{vol}(J_j) \\
&< \operatorname{osc}(I)\,\varepsilon + \operatorname{vol}(I)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

   Observe que sendo f limitada num intervalo compacto I, $\operatorname{osc}(I)$ e $\operatorname{vol}(I)$ são finitos. Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que $\bar{\int}_I f = \underline{\int}_I f$ e f é integrável à Riemann.

Supomos agora que f é integrável à Riemann em I. Se provarmos que para qualquer $\eta > 0$ o conjunto $D_\eta = \{x \in I\colon \operatorname{osc}(x) \geq \eta\}$ tem medida de Lebesgue nula, então $D = \cup_k D_{1/k}$ também terá medida de Lebesgue nula. Dado $\varepsilon > 0$ existem funções em escada $s \leq f$ e $t \geq f$ tais que $\int t - \int s < \varepsilon$. Nos intervalos I_i gerados pela união das partições de s e t temos que estas funções escada são constantes, o que implica que

$$\sum_i \operatorname{osc}(I_i) \operatorname{vol}(I_i) \leq \int t - \int s < \varepsilon.$$

Considere K como o conjunto dos índices tais que $\operatorname{osc}(I_k) \geq \eta$ se $k \in K$. Isto é, $D_\eta \subset \cup_{k\in K} I_k$. Então,

$$\sum_{k\in K} \eta \operatorname{vol}(I_k) \leq \sum_{k\in K} \operatorname{osc}(I_k) \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon.$$

Temos assim $\sum_{k\in K} \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon\, \eta^{-1}$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos $m(D_\eta) = 0$.

2. Se f é integrável à Riemann, então é mensurável e limitada pois é contínua q.t.p. Assim, f é integrável à Lebesgue. Como funções em escada são também funções simples, temos então que

$$\begin{aligned}\underline{\int}_I f &= \sup\left\{\int s\colon s \leq f, s \text{ escada}\right\}\\ &\leq \sup\left\{\int \varphi\, dm\colon s \leq f, \varphi \text{ simples}\right\} = \int_I f\, dm\\ &\leq \inf\left\{\int t\colon f \leq t, t \text{ escada}\right\} = \overline{\int}_I f.\end{aligned}$$

Logo, os integrais de Riemann e de Lebesgue são iguais.

□

6.5 Teorema da convergência dominada

Teorema 6.5.1 (Convergência dominada)**.** *Sejam a sucessão de funções mensuráveis $f_k\colon E \to \mathbb{R}$ e $g \in L^1(E, \mu)$ tais que f_k converge q.t.p. e*

$$|f_k| \leq g \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\int_E \lim_{k\to+\infty} f_k\, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_E f_k\, d\mu.$$

Demonstração. Suponha primeiro que $0 \leq f_k \leq g$. Pelo lema de Fatou,

$$\int_E \lim_{k\to+\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

Basta agora mostrar que $\limsup_{k\to+\infty} \int_E f_k \, d\mu \leq \int_E \lim_{k\to+\infty} f_k \, d\mu$. De facto, usando novamente o lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
\int_E g \, d\mu - \int_E \lim_{k\to+\infty} f_k \, d\mu &= \int_E \lim_{k\to+\infty} (g - f_k) \, d\mu \\
&\leq \liminf_{k\to+\infty} \int_E (g - f_k) \, d\mu \\
&= \int_E g \, d\mu - \limsup_{k\to+\infty} \int_E f_k \, d\mu.
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_E f_k \, d\mu \leq \int_E \lim_{k\to+\infty} f_k \, d\mu.$$

Para $|f_k| \leq g$, temos $\max\{f^+, f^-\} \leq g$ e pelo que vimos anteriormente, $\lim_{k\to+\infty} \int_E f^\pm \, d\mu = \int_E \lim_{k\to+\infty} f^\pm \, d\mu$. Isto prova o teorema. □

Exemplo 6.5.2.

1. Considere $E =]0,1[$ e

$$f_k(x) = \frac{k \sin x}{1 + k^2\sqrt{x}}.$$

   Assim,

$$|f_k(x)| \leq \frac{k}{1 + k^2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

   Como $g(x) = 1/\sqrt{x}$ é integrável, então $\lim_{k\to+\infty} \int_E f_k \, dm = \int_E \lim_{k\to+\infty} f_k \, dm = 0$.

2.

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^k} \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{k\to+\infty} e^{-(x^2+y^2)^k} \, dx \, dy = \int_D dm = \pi,$$

   onde usámos o facto de $|e^{-(x^2+y^2)^k}| \leq e^{-(x^2+y^2)}$ integrável, e

$$\lim e^{-(x^2+y^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{e}, & (x,y) \in \partial D \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \\ 1, & (x,y) \in D \end{cases}$$

   com $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

Exercício 6.5.3. Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{r^k}{1+r^{k+2}} dr$

2. $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt[k]{x}}{1+x^2}\, dx$

3. $\lim_{k\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos^k(x)\, dx$

4. $\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+\cos^k(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}\, dx\, dy$

6.5.1 Aplicações

Teorema 6.5.4 (Beppo-Levi)**.** *Sejam $f_k\colon E \to \mathbb{R}$ mensurável, $k \in \mathbb{N}$, e $E \in \mathcal{F}$. Se $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k|\, d\mu < +\infty$, então $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge absolutamente q.t.p. e*

$$\int_E \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_E f_k\, d\mu.$$

Demonstração. Sejam $\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \geq 0$ e $g_j = \sum_{k=1}^{j} |f_k|$. Temos então que ψ é mensurável, $g_j \leq g_{j+1}$, $\lim_{j\to+\infty} g_j = \psi$ e

$$\int_E g_j\, d\mu = \sum_{k=1}^{j} \int_E |f_k|\, d\mu.$$

Logo, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int_E \psi\, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_E g_j\, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{j} \int_E |f_k|\, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k|\, d\mu.$$

Ou seja, ψ é integrável e finita q.t.p, logo $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge absolutamente q.t.p. Como

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\right| \leq \psi,$$

pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_E \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\, d\mu = \int_E \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{j} f_k\, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{j} \int_E f_k\, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_E f_k\, d\mu.$$

□

Exemplo 6.5.5. Para calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx$$

notamos que $(1-x)^{-2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} kx^{k-1}$ e escrevemos $f_k(x) = kx^{k-1}\log^2 x \geq 0$. Assim, como $\int_0^1 f_k\,dx = 2/k^2$ (fazendo a integração por partes), temos que o resultado final é $\sum_k 2/k^2 = \pi^2/3$.

Exercício 6.5.6. Calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}\,\mathcal{X}_{[0,k]}\,dm.$$

Consideremos agora uma função $\varphi\colon B\to\mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_A f(t,x)\,d\mu(t)$$

com $f\colon A\times B\to\mathbb{R}$ e onde $A\subset\mathbb{R}^m$ e $B\subset\mathbb{R}^p$ são conjuntos mensuráveis e μ é uma medida em $\mathbb{R}^m$. Seja $f_t(x) = f(t,x)$ para cada t fixo, e $f_x(t) = f(t,x)$ fixando x. Podemos então escrever $\varphi(x) = \int_A f_x\,d\mu$.

Proposição 6.5.7. *Se*

- *f_x mensurável em A para $x\in B$,*
- *f_t contínua em B para $t\in A$ q.t.p,*
- *existe $g\in L^1(A,\mu)$ tal que $|f_x|\leq g$ μ-q.t.p. em A,*

então φ é contínua em B.

Demonstração. Basta mostrar que para qualquer sucessão x_k em B tal que $\lim_{k\to+\infty} x_k = x \in B$ verifica-se $\lim_{k\to+\infty}\varphi(x_k) = \varphi(x)$. Seja $h_k(t) = f(t,x_k)$, logo $\lim_{k\to+\infty} h_k = \lim_{k\to+\infty} f_t(x_k) = f_t(x) = f(x,t)$ porque f_t é contínua. Além disso, $|h_k|\leq g$ e $\varphi(x_k) = \int_A h_k\,d\mu$. Assim,

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(x_k) = \lim_{k\to+\infty}\int_A h_k\,d\mu = \int_A \lim_{k\to+\infty} h_k\,d\mu$$

pelo teorema da convergência dominada. □

Teorema 6.5.8 (Regra de Leibnitz)**.** *Seja*

- *f_x mensurável em A para $x\in B$,*
- *existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)$ para q.t.p. $t\in A$,*

- *existe* $g \in L^1(A, \mu)$ *tal que* $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)\right| \leq g(t)$ *para* $x \in B$ *e q.t.p.* $t \in A$.

Então, para x *no interior de* B,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)\, d\mu(t).$$

Demonstração. A derivada parcial de φ é dada por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_A [f(t, x + he_i) - f(t, x)]\, d\mu(t)}{h},$$

onde e_i é o i-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^p$. Este limite existe se for válido para qualquer sucessão $h_k \to 0$ tal que $x + h_k e_i \in B$. Seja

$$\alpha_k(t) = \frac{f(t, x + h_k e_i) - f(t, x)}{h_k}.$$

Pelo teorema do valor médio, existe c_k entre 0 e h_k tal que $\alpha_k(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x + c_k e_i)$. Finalmente, como $|\alpha_k| \leq g$ podemos usar o teorema da convergência dominada para obtermos $\lim_{k \to +\infty} \int_A \alpha_k\, d\mu = \int_A \lim_{k \to +\infty} \alpha_k\, d\mu$. Note que $\lim_{k \to +\infty} \alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. □

Exercício 6.5.9. Mostre que para $x \geq 1$ temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \log x.$$

Apêndice A

Complementos de cálculo diferencial

A.1 Teorema da função implícita

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aberto e $F\colon D \to \mathbb{R}^m$ uma função C^1. Usamos a notação $(x, y) \in D$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Teorema A.1.1 (Função implícita)**.** *Se $F(a, b) = 0$ e $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, então existe uma vizinhança V de a e uma função C^1 dada por $f\colon V \to \mathbb{R}^m$, tais que $f(a) = b$ e $F(x, f(x)) = 0$.*

Observação A.1.2. Este teorema significa que $F^{-1}(\{0\})$ é localmente o gráfico de uma função C^1.

Demonstração. Consideremos aqui apenas o caso $m = 1$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$; para < 0 podemos usar uma ideia semelhante.

Como F é C^1, temos $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ numa vizinhança de (a, b). I.e. $y \mapsto F(x, y)$ é crescente para x fixo. Deste modo, $F(a, y) < 0 < F(a, y')$ para $y < b < y'$. Sendo F contínua então muda de sinal uma única vez para x fixo suficientemente próximo de a, pois $y \mapsto F(x, y)$ é crescente. Logo, para cada x existe um único y tal que $F(x, y) = 0$. Isto define uma função contínua em a dada por $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$. De forma semelhante podemos provar que f é contínua em todos os pontos numa vizinhança de a.

Resta provar que f é C^1. Consideremos o ponto $x = a$, para outros pontos numa vizinhança de a a ideia é a mesma. Para h suficientemente próximo de zero, $F(a + h, f(a + h)) = 0$. Escrevendo $k = f(a + h) - f(a)$ que satisfaz $k \to 0$ quando $h \to 0$ pela continuidade de f, obtemos assim

$$F(a + h, b + k) - F(a, b) = 0.$$

Expandindo na fórmula de Taylor,

$$h\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)+\mathcal{O}(\|(h,k)\|^2)=0.$$

Temos então

$$\left|\frac{k}{h}\right|=A+\mathcal{O}(\|(h,k)\|)\frac{\|(h,k)\|}{h}\leq A+\frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{k}{h}\right|\right),$$

onde $A=|\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)|$. Ou seja, o quociente $|k/h|\leq 2A+1$ é limitado e assim $h^{-1}\mathcal{O}(\|(h,k)\|^2)\to 0$ quando $h\to 0$. Logo, $f'(a)=-A$. $\square$

Exercício A.1.3. Considere uma função F nas condições do teorema da função implícita. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

Exercício A.1.4. Seja $F(x,y)=e^{xy}\cos(xy)$. Analise geometricamente o conjunto dos zeros de F em redor de $(0,\pi/2)$. Isto é, determine a tangente a esse conjunto no ponto indicado.

Exercício A.1.5. Seja $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,x-y).$$

Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1,1,0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2,0)\})$ é o gráfico de uma função $f\colon I\to\mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

A.2 Teorema da função inversa

Recorde que se uma função $f\colon I\to\mathbb{R}$ definida num intervalo aberto $I\subset\mathbb{R}$ verifica $f'(x)\neq 0$, $x\in I$, então f é injectiva em I. A derivada da função composta aplicada a $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}$ implica que $(f^{-1})'(f(x))=(f'(x))^{-1}$. Por outro lado, f^{-1} é C^1 sse f é C^1 e $f'(x)\neq 0$, $x\in I$.

O caso multidimensional $n\geq 1$ é tratado no teorema seguinte.

Teorema A.2.1. *Seja $D\subset\mathbb{R}^n$ aberto, $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ uma função C^1 e $x_0\in D$. Se $\det Df(x_0)\neq 0$, então*

1. *f é injectiva numa vizinhança de x_0,*
2. *f^{-1} é C^1,*

3. $Df^{-1}(f(x)) = Df(x)^{-1}$.

Demonstração. Seja $F\colon D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x,y) = f(x) - y$. Assim, $F(x_0, f(x_0)) = 0$ e $\det \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, f(x_0)) = \det Df(x_0) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, existe uma função $g \in C^1$ numa vizinhança de $f(x_0)$ com valores numa vizinhança de x_0 tal que $F(g(y), y) = 0$, i.e. $f(g(y)) = y$. Desta forma, $f^{-1} = g$ é C^1.

Finalmente, de $f^{-1} \circ f(x) = x$ obtém-se a fórmula da derivada de f^{-1}. □

Observação A.2.2. Note que a invertibilidade garantida pelo teorema é apenas local. Somente no caso unidimensional podemos garantir que é global. Por exemplo, $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, é claramente não injectiva, mas é localmente injectiva.

Exercício A.2.3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) \neq 0$, mas não é invertível numa vizinhança de 0. Explique porque é que este exemplo não contradiz o teorema da função inversa.

Exercício A.2.4. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (u,v)$ onde

$$\begin{cases} u = x - y + \log(1 + xy) \\ v = x + y - x^2y^2. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(0,0)$ onde f tem inversa C^1 em torno de $f(0,0)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)$.

Exercício A.2.5. *Assumindo a validade do teorema da função inversa, demonstre o teorema da função implícita. *Sugestão*: Considere $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $F \in C^1(S, \mathbb{R}^m)$, $n > m$, $F(a,b) = 0$ com $a \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, e $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Aplique o teorema da função inversa a $H(x,y) = (x, F(x,y))$ de forma a resolver a equação $F(x,y) = 0$.

Apêndice B

Exercícios

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1, x > 0\}.$$

   (a) Mostre que M é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

   (b) Determine o espaço tangente e o espaço normal de M no ponto $(1, 1)$.

   (c) Esboce o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1\}$. *Sugestão*: Recorra a um computador.

2. Calcule o ponto de

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \|x - (1, 2, 3, 4)\| = 1\}$$

   mais próximo da origem.

3. Considere a hipérbole

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\}$$

   e recorde as funções hiperbólicas:

$$\cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

   (a) Decida se a função $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, parametriza uma das componentes da hipérbole H. Em caso afirmativo, indique qual.

   (b) Calcule o integral de linha de $f(x, y) = (x^{-2}, 0)$ ao longo de H restringido ao primeiro quadrante.

(c) Decida se $\phi\colon \mathbb{R}^+ \times]0,1[\to \mathbb{R}^2$, $\phi(r,\theta) = (r\cosh\theta, r\sinh\theta)$, é uma transformação de coordenadas.

(d) Esboce

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = r^2, 1 < r < 2, 0 < y < \frac{e-1}{e+1}x\right\}$$

e calcule o integral em S de

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+y}{x-y}\right).$$

4. Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Prove que para $\lambda > 0$ e uma função mensurável $f \geq 0$, temos

$$\mu\left(\{x \in \Omega \colon f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega f\, d\mu,$$

5. Considere o hiperbolóide

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

(a) Qual a dimensão desta variedade?

(b) Calcule os espaços tangente e normal de H no ponto $(1,1,1)$.

(c) Determine o ponto de $H \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1\}$ mais próximo de $(1,2,3)$.

6. Calcule:

(a) o integral

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{y}{x}\, e^{-xy-y/x}\, dxdy.$$

(b) o centróide de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1, |x| < 2\}$.

7. Considere o conjunto $D = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon \max_i |x_i| < 1\}$.

(a) Esboce a fronteira de D e determine a normal exterior unitária em cada ponto.

(b) Calcule

$$\int_D \operatorname{div} X$$

onde X é o campo vectorial dado por

$$X(x,y,z) = (e^{x^2yz}, \cos(xy^2z), e^{\sin(xyz^2)}).$$

8. Considere a σ-álgebra $\mathcal{M}$ de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Seja $\mu = m + \delta_0$ onde m é a medida de Lebesgue e δ_0 é a medida de Dirac no ponto 0. Mostre que:

   (a) μ é uma medida em $\mathcal{M}$ e que para qualquer função simples φ e qualquer conjunto mensurável A temos que
   $$\int_A \varphi \, d\mu = \int_A \varphi \, dm + \varphi(0).$$

   (b) para qualquer função mensurável f temos que
   $$\int_A f \, d\mu = \int_A f \, dm + f(0),$$
   e calcule
   $$\int_{[0,2\pi]} \sin(x) \, d\mu(x).$$

9. Seja Ω um conjunto finito. Determine o cardinal do conjunto das partes de Ω.

10. (a) Esboce a curva parametrizada por $\phi(t) = (\sin(2t), \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, e indique se é fechada.

    (b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x, y, z) = (x, 1, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ao longo da curva parametrizada por $\phi(t) = (\sin(t), \sin(2t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

11. Considere a aplicação
    $$\nu(A) = \int\int_A e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$
    para cada $A \subset \mathbb{R}^2$ mensurável à Lebesgue.

    (a) Mostre que ν é uma medida.

    (b) Calcule $\nu(B)$ onde
    $$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x > 0\}.$$

12. Calcule:

    (a) a média da distância à origem dos pontos de $\mathbb{R}^3$ contidos no interior da esfera com raio $R > 0$ centrada na origem.

    (b) o ponto do plano $P = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ mais perto da origem.

13. Seja
    $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, y > 0, 0 < z < 1\}.$$

(a) Mostre que S é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine os vectores normais unitários em cada ponto da fronteira de

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < 1, y > 0, 0 < z < 1\right\}.$$

(c) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$X(x, y, z) = \left(x^2 y, \frac{x}{1+y^4}, \sqrt{z}\right)$$

pela fonteira de D.

14. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de Ω. Considere uma aplicação $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para quaisquer dois conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{F}$. Mostre que μ é uma medida se verifica a seguinte propriedade:

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)$$

para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis $A_k \subset A_{k+1}$.

15. (a) Escreva a parametrização de uma curva em $\mathbb{R}^3$ com a forma ∞ e decida se é uma variedade diferencial.

(b) Calcule os espaços tangente e normal à curva da alínea anterior num ponto à sua escolha.

16. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+$ uma função integrável à Lebesgue relativamente à medida de Lebesgue m em $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação

$$\nu(A) = \int_A f\, dm$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}^3$ mensurável à Lebesgue.

(a) Sabendo que $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ para A e B conjuntos mensuráveis disjuntos, mostre que ν é aditiva para a união numerável. (Sugestão: use o teorema da convergência monótona)

(b) Calcule $\nu(B)$ onde

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

e

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\}.$$

17. Calcule:

    (a) o ponto na recta $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 3\}$ mais perto da circunferência $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

    (b) a média da distância ao eixo $\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in \mathbb{R}\}$ dos pontos contidos no cilindro

    $$C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq R, |z| \leq h\big\}$$

    com $R, h > 0$.

18. Seja

    $$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = (z-1)^2, y > 0, 0 < z < \frac{1}{2}\right\}.$$

    (a) Mostre que S é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

    (b) Determine os vectores normais unitários em cada ponto da fronteira de

    $$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < (z-1)^2, y > 0, 0 < z < \frac{1}{2}\right\}.$$

    (c) Calcule o fluxo do campo vectorial $X(x,y,z) = \big(y^2, x, (1-z)^{-1}\big)$ pela fonteira de D.

19. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de Ω. Considere uma aplicação $\mu \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para $A, B \in \mathcal{F}$ disjuntos. Mostre que se

    $$\mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_k)$$

    para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis $A_{k+1} \subset A_k$, então μ é uma medida em $\mathcal{F}$.

20. (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra "J".

    (b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x,y) = (1,0)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

21. Considere uma superfície M em $\mathbb{R}^3$ parametrizada em torno do ponto $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ por $\phi \colon V \to \mathbb{R}^3$,

    $$\phi(\theta, \varphi) = (\cos\theta \, \cos\varphi, \cos\theta \, \sin\varphi, \cos\theta),$$

    com $V =]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Determine os espaços tangente e normal a M em p.

(b) Dada a função $f(x,y,z) = y$ em $\mathbb{R}^3$, calcule o integral de f em $\phi(V)$.

22. Calcule:

(a) a distância média à origem dos pontos em $\mathbb{R}^2$ contidos num círculo com raio R centrado na origem.

(b) os pontos em $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z\}$ mais próximos de $(0,0,1)$.

(c) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon r \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R,\, x,y,z \geq 0\},$$

onde $0 < r < R$.

23. Considere a medida de contagem $\mu(A) = \#A$ com $A \subset \mathbb{N}$, e a função mensurável $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Definindo $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, calcule $\nu(\{1,2,\ldots,10\})$ e mostre que ν é uma medida.

(b) Calcule $\int_A \frac{1}{n}\, d\nu(n)$ onde $A = \{1,2,\ldots,10\}$.

24. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Seja A_k, $k \in \mathbb{N}$, uma sucessão de conjuntos mensuráveis com medida total. Mostre que a sua intersecção também tem medida total.

25. (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra "Ω".

(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x,y) = (1,1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

26. Calcule:

(a) a distância média à origem dos pontos de $\mathbb{R}^3$ contidos no interior da esfera com raio R centrada na origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 + x^2 \leq y^2,\, 0 < y < 1\}.$$

27. Seja $\alpha > 0$ e

$$S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z, z < \alpha\}.$$

(a) Determine a normal unitária exterior ν a S_α.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$X(x,y,z) = (z^2y^3, x^2+z^2, xy)$$

através de S_α segundo ν.

28. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

com $A \subset \mathbb{R}$, e a seguinte função

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{10} i\, \delta_i(A).$$

(a) Obtenha o valor de $\mu(\mathbb{R})$ e mostre que μ é uma medida.

(b) Calcule $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\, d\mu(n)$.

29. Mostre que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue total é denso.

30. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = \theta,\ a + d = 0\right\}$$

e a função $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Determine para que valores de θ o conjunto M_θ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a M_θ no ponto $(0,-\theta,1,0)$ com $\theta \neq 0$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2\,|\theta|$ em M_θ com $\theta < 0$.

31. Calcule:

(a) a massa do sólido

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\right\}$$

sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\rho(x,y,z) = e^{-x^2-y^2}.$$

(b) o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x^2+y^2)^{n/2}}{1+(x^2+y^2)^{(n+3)/2}}\, dx\, dy.$$

32. Calcule, para o conjunto
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+y<1, 0<y<x\},$$
o valor de
$$\int_A (x^2-y^2)e^{-(x+y)^4}\,dx\,dy.$$

33. Seja $\alpha > 0$. Considere a superfície
$$S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \alpha(x^2+y^2), 1 < x^2+y^2 < 2\}$$
e a normal unitária ν a S_α com terceira componente negativa. Determine o fluxo de $F(x,y,z) = (y^3, x^3, (z-\alpha)(z-2\alpha))$ através de S_α segundo ν.

34. Seja Ω um conjunto finito e não vazio. Considere a σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ contendo todos os subconjuntos de Ω. Seja $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $p(\omega) \geq 0$ para qualquer $\omega \in \Omega$, e
$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1.$$
   (a) Mostre que
   $$\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \subset \Omega$$
   define uma medida de probabilidade em $\mathcal{P}(\Omega)$.
   (b) Para $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ e $p(\omega) = \frac{1}{4}$, calcule $\int_\Omega \varphi\,d\mu$ onde $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(\omega_1,\omega_2) = 1$ se $\omega_1 = 0$ e $\varphi(\omega_1,\omega_2) = 0$ caso contrário.

35. Calcule:
   (a) o centróide de
   $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y>0\}.$$
   (b) o ponto sobre a superfície cilíndrica com eixo dado pela recta $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x=1, y=0\}$ e raio 2, mais próximo da origem.

36. Seja $r > 0$ e
$$S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = r^2, y>0\}.$$
Considere a normal unitária ν a S_r cuja segunda componente é negativa. Calcule o valor de r para o qual o fluxo de $F(x,y,z) = (z^2y^3, x^2+z^2, x^2y^3)$ através de S_r segundo ν é $-\pi$.

Sugestão: Note que ν não é necessariamente exterior.

37. Calcule o integral de linha de
$$F(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{y}{(x-1)^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)$$
ao longo da fronteira do losango que une os pontos $(2,0),(0,-2),(-2,0),(0,2)$ no sentido horário.

38. Dado $\lambda>0$, considere a seguinte função μ definida para subconjuntos A de $\mathbb{N}$:
$$\mu(A)=\sum_{n\in A}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$
   (a) Mostre que μ define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.
   (b) Calcule o integral $\int_{\mathbb{N}}\varphi\,d\mu$ onde $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ é dada por $\varphi(n)=n$ se $n\leq 3$ e $\varphi(n)=0$ caso contrário.
   (c) Calcule $\int_{\mathbb{N}}\frac{1}{n}\,d\mu(n)$.

39. Considere $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Dado $\varepsilon>0$, dê um exemplo de um conjunto aberto V tal que $A\subset V$ e $m(V)\leq\varepsilon$, onde m é a medida de Lebesgue. *Sugestão*: Recorde que a união de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto.

40. Seja a função em $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ dada por
$$f(x)=\|x\|^{-\|x\|}.$$
Determine se f é integrável à Lebesgue no seu domínio.

41. Considere o conjunto
$$M=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\colon ad-bc=1\right\}$$
e a função $\varphi\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ dada por
$$\varphi(a,b,c,d)=a^2+b^2+c^2+d^2.$$
   (a) Mostre que M é uma variedade diferencial e determine a sua dimensão.
   (b) Determine os espaços tangente e normal a M no ponto $(1,0,0,1)$.
   (c) Prove que $\varphi\geq 2$ em M.
   Sugestão: Encontre o mínimo de φ em M.

42. Calcule:
   (a) os pontos de
$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2=y^2+z^2,\ 2x+z=2\right\}$$
   mais próximos e mais distantes da origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_V \mathrm{div} f$$

onde $f(x, y, z) = \big(-y \sin^2(x + y), x \sin^2(x + y), z\big)$ e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x - y < 1,\ 0 < x + y < 1,\ 0 < z < 1\}.$$

43. Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 \colon \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$.

(a) Determine a σ-álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ denotada por $\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Considere a aplicação $\mu \colon \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

onde $\#B$ indica o número de elementos de um qualquer conjunto B. Mostre que μ é uma medida de probabilidade.

44. Dado $q \in]0, 1[$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de $\mathbb{N}$ por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} (1 - q) q^{n-1},$$

define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.

45. Considere o caminho $\gamma \colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{2x}{(x^2 - y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2 - y^2)^2}, z^2\right).$$

(a) Mostre que f é o gradiente de uma função escalar.

(b) Calcule o integral do campo vectorial f ao longo de γ.

46. Considere o conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\ x^2 - 1 < y < x^2,\ x^3 < z < x^3 + 2\right\}.$$

(a) Decida se $h(x, y, z) = (x, y - x^2, z - x^3)$ é uma mudança de coordenadas em S e determine $h(S)$.

Sugestão: Recorde que h é uma mudança de coordenadas sse é C^1, injectiva e $\det Dh(x, y, z) \neq 0$.

(b) Indique o valor de

$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2}\, dx\, dy\, dz.$$

47. Considere os conjuntos

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z + \log(z/x) - \log(z/y) = 0,\ x, y, z > 0\right\},$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 - y^2 = z\}.$$

(a) Mostre que M, N e $M \cap N$ são variedades diferenciais e determine as suas dimensões.

(b) Escreva os espaços tangente e normal de $M \cap N$ num ponto qualquer $p \in M \cap N$.

48. Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) o ponto sobre a superfície esférica de centro $(2, 3, 4)$ e raio 1, mais próximo da origem.

49. Considere a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

(a) Calcule o integral em Γ da função $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

(b) Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \Gamma,\ z \in [0, 1]\}.$$

Determine o fluxo de $g(x, y, z) = (0, 0, 1)$ através de M.

50. Considere o conjunto $\Omega = [0, 1]$ e o subconjunto das partes de Ω dado por $\mathcal{A} = \{\{0\}, \{1\}\}$. Indique a σ-álgebra $\mathcal{F}$ gerada por $\mathcal{A}$. Decida se

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \text{ ou } 1 \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad A \in \mathcal{F},$$

é uma medida de probabilidade.

51. (a) Calcule
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t/n}\,dt.$$

(b) Mostre que
$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Sugestão: Recorde que $1/(1-y)=\sum_{n\geq 0}y^n$ com $|y|<1$. Use o teorema de Beppo-Levi.

52. Seja $F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por
$$F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,x-y).$$

(a) Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1,1,0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2,0)\})$ é o gráfico de uma função $f\colon I\to\mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(b) Encontre uma parametrização de $F^{-1}(\{(2,0)\})$ numa vizinhança U de $(1,1,0)$.

53. Considere o caminho $\gamma\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ dado por
$$\gamma(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t).$$

Calcule:

(a) o comprimento da curva $\Gamma=\gamma([0,2\pi])$.

(b) o integral do campo vectorial $f(x,y,z)=(e^x\sin y,e^x\cos y,1)$ ao longo de γ.

54. Considere a superfície
$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=z^2,\ \frac{\pi}{2}<z<\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

(a) Escreva uma representação paramétrica de M e determine o integral de $f(x,y,z)=(x+y)\sin z$ em M.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial $g(x,y,z)=(xz^2,yz^2,z^3)$ através de M segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

55. Calcule:

(a)
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}\sin^n(x+y)\,dx\,dy.$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}\left[\frac{2n^2}{n^2+x^2}+f(x^n)\right]dx,$$

onde $f \in C^0([0,1])$.

B.1 Soluções

1. (a) 1
   (b) $T_{(1,1)}M^{\perp} = \text{span}\{(1,0)\}$, $T_{(1,1)}M = \text{span}\{(0,1)\}$
2. $(1-\sqrt{30}/30)(1,2,3,4)$
3. (a) A componente com $x > 0$.
   (b) 1
   (c) Sim.
   (d) $3/16$
4.
5. (a) 2
   (b) $T_{(1,1,1)}H^{\perp} = \text{span}\{(1,1,-1)\}$, $T_{(1,1,1)}H = \text{span}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$
   (c) $(\sqrt{10}/5, 2\sqrt{10}/5, 1)$
6. (a) $1/2$
   (b) $(0,0)$
7. (a) Em $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = \pm1, \max_{i=2,3}|x_i| \leq 1\}$, $\nu(x) = (\pm1,0,0)$; em $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 = \pm1, \max_{i=1,3}|x_i| \leq 1\}$, $\nu(x) = (0,\pm1,0)$; em $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = \pm1, \max_{i=1,2}|x_i| \leq 1\}$, $\nu(x) = (0,0,\pm1)$.
   (b) 0
8. (b) 0
9. $2^{\#\Omega}$
10. (a) Não simples, fechada.
    (b) $2\pi^2$
11. (b) $\frac{\pi}{2}\frac{e-1}{e^2}$
12. (a) $3R/4$
    (b) $(1,1,1,0)$

13. (a) 2
    (b) $(0,0,\pm 1)$ em $\bar{D}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z=0\}$ e $\bar{D}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z=1\}$, $\pm(x,y,0)$ em S, $(0,\pm 1,0)$ em $\bar{D}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon y=0\}$.
    (c) $\pi/2$

14.

15. (a) $\gamma(t)=(\sin(t),\sin(2t),0)$, $t\in[0,2\pi]$, $\Gamma=\gamma([0,2\pi])$ não é uma variedade diferencial.
    (b) $p=\gamma(\pi/2)=(1,0,0)$, $T_p\Gamma=\operatorname{span}\{(0,1,0)\}$,
    $T_p\Gamma^\perp=\operatorname{span}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

16. (b) $(\pi/2)^3$

17. (a) $(3/2,3/2)$
    (b) $2\sqrt{R}/3$

18. (a) 2
    (b) $(0,0,\pm 1)$ em $\bar{D}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z=0\}$ e $\bar{D}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z=1/2\}$, $(0,\pm 1,0)$ em $\bar{D}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon y=0\}$, $\pm(x,y,1-z)/[\sqrt{2}(1-z)]$ em S.
    (c) $\pi/4$

19.

20. (a) Por exemplo,

$$\gamma(t)=\begin{cases}(t,0), & t\in[-1,0]\\ (0,-t), & t\in[0,1]\\ (-1,-1/2)+1/2(\sin(1-t),\cos(1-t)), & t\in[1,1+\pi]\end{cases}$$

    (b) 1

21. (a) $T_pM=\operatorname{span}\{(1,1,\sqrt{2}),(1,-1,0)\}$, $T_pM^\perp=\operatorname{span}\{(1,1,-\sqrt{2})\}$
    (b) $\sqrt{2}/3$

22. (a) $2R/3$
    (b) $x^2+y^2=1/2$, $z=1/2$
    (c) $\frac{3}{8}\frac{R^2-r^2}{R^{3/2}-r^{3/2}}$

23. (a) 3
    (b) $1+1/4+1/9$

24.

25. (a) Por exemplo,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t-1,0), & -1 \leq t \leq 0 \\ (0,1) + \sqrt{2}\,\rho(-t+5\pi/4), & 0 \leq t \leq 3\pi/2 \\ (t+1-3\pi/2,0), & 3\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2+1 \end{cases}$$

onde $\rho(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

(b) 4

26. (a) $3R/4$

(b) $(0,3/4,0)$

27. (a) $(2x,2y,-1)/\sqrt{4z+1}$

(b) 0

28. (a) 55

(b) 10

29.

30. (a) $\theta \neq 0$, $\dim M_\theta = 2$

(b) $T_pM = \operatorname{span}\{(1,0,0,-1),(0,\theta,1,0)\}$,
$T_pM^\perp = \operatorname{span}\{(0,-1,\theta,0),(1,0,0,1)\}$

31. (a) $2\pi(1-1/e)$

(b) 2π

32. $(1-e^{-1})/16$

33. $\pi\alpha^2/6$

34. (b) $1/2$

35. (a) $(0,3/8,0)$

(b) $(-1,0,0)$

36. $\sqrt[4]{2}$

37. 0

38. (a)

(b) $e^{-\lambda}(1+2\lambda+3\lambda^2/2)$

(c) $(1-e^{-\lambda})/\lambda$

39. Seja q_n uma sucessão cujos termos são todos os racionais em $[0,1]$. $V = \bigcup_{n\geq 1}]q_n - \varepsilon/2^{n+1}, q_n + \varepsilon/2^{n+1}[$.

40. Integrável,

41. (a) 3
    (b) $T_pM = \{(x, y, z, w) \colon x + w = 0\}$, $T_pM^\perp = \{(x, 0, 0, w) \colon x - w = 0\}$

42. (a) mais perto (2/3,0,2/3), mais longe (2,0,-2)
    (b) (0,1/2,0)
    (c) $(5 - \cos 2)/8$

43. (a) $\{\emptyset, \Omega, A_0, A_1, A_0 \cup A_1, A_0^c, A_1^c, (A_0 \cup A_1)^c\}$

44.

45. (a) $\varphi(x, y, z) = 1/(x^2 - y^2) + z^3/3$
    (b) $1/(e^\pi - 1) + \pi^3/24 - 1$

46. (a) $]0, 1[\times] - 1, 0[\times]0, 2[$
    (b) $\pi/2$

47. (a) $\dim M = 2$, $\dim N = 2$, $\dim M \cap N = 1$
    (b) $p = (x, y, z)$, $T_p(M \cap N) = \operatorname{span}\{(x/y(y + v), v, 1)\}$, $v = -(2x^2 - 1)y/(2x^2-2y^2)$, $T_p(M\cap N)^\perp = \operatorname{span}\{(-1/x, 1/y, 1), (2x, -2y, -1)\}$

48. (a) (0,1/2,0)
    (b) mais perto: $(2-2a, 3-3a, 4, 4a)$, mais longe: $(2+2a, 3+3a, 4+4a)$; $a = 29^{-1/2}$

49. (a) 78π
    (b) 0

50. Não é aditiva.

51. (a) 2

52. (b) $\varphi(\theta) = (\cos\theta, \cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in] - \pi/2, \pi/2[$

53. (a) $\sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)$
    (b) $e^{2\pi} - 1$

54. (a) 0
    (b) 0

55. (a) 0
    (b) $2 + f(0)$

Bibliografia

[1] L. Magalhães. *Integrais Múltiplos*. Texto Editora, 1996.

[2] L. Magalhães. *Integrais em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, 1993.

[3] M. Spivak. *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley, 1974.

[4] M. Capinski and E. Kopp. *Measure, Integral and Probability*. Springer, 2005.

[5] H. L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan, 3rd Ed, 1988.

[6] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd Ed, 1987.

Índice