INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO EM $\mathbb{R}^n$
ERRATA

JOÃO LOPES DIAS

1

Esta errata à edição de Setembro 2015 usa a seguinte notação: pxx indica a página xx, lyy indica a linha yy. Uma linha negativa significa que é contada a partir do fundo da página. Equações são contadas como linhas. Inclui-se apenas a parte do texto corrigido.

2

(1) p61 l7: $\widetilde{\gamma}(t) = x + te_i$ com t entre 0 e s e $|s|$ suficientemente pequeno
(2) p43 l11: $h(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y = 0\}$
(3) p43 l-7: $h(A) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \colon x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$
(4) p65 l-8: Ora esta função não é integrável à Riemann
(5) p87 l-3: Se $g = \sup_{k\geq 1} f_k$, temos que
(6) p30 l8: $A > 0$ em $\ker B$ sse $(-1)^{n-m} \det C_i > 0$, $i = n-m+1, \dots, n$.
(7) p30 l9: $A < 0$ em $\ker B$ sse $(-1)^{i} \det C_i > 0$, $i = n-m+1, \dots, n$.
(8) p16 l-1: $(r, \theta, \varphi) = \phi^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \Theta(x, y), \Theta(\sqrt{x^2 + y^2}, z))$
(9) p26 l14: Como ψ_i é C^1
(10) p29 l5: produto de três números positivos igual a 1.
(11) p115: Incluir entre Teorema A.2.1 e Exercício A.2.2:

    Observação 2.1. Note que a invertibilidade garantida pelo teorema é apenas local. Somente no caso unidimensional podemos garantir que é global. Por exemplo, $f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, é claramente não injectiva, mas é localmente injectiva.

(12) p49 l2 a l4:

$$\int_{\phi_1^{-1}(M\cap U)} f \circ \phi_1 \sqrt{\det D\phi_1^T D\phi_1} =$$
$$= \int_{\psi^{-1}\circ\phi_2^{-1}(M\cap U)} f \circ \phi_2 \circ \psi \, |\det D\psi| \sqrt{\det D\phi_2 \circ \psi^T D\phi_2 \circ \psi}$$
$$= \int_{\phi_1^{-1}(M\cap U)} f \circ \phi_1 \sqrt{\det D\phi_1^T D\phi_1},$$

(13) p38 l-1: considerando a **função característica** de S

Date: 26 de Novembro de 2020.

(14) p39 l6 a l9: Assim, $\int_D f = \int_I g$ com $g = f\mathcal{X}_D$,

$$g_x(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq x^2 \\ x^3 y, & x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & 2x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 g(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^2 g_x(y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} x^3 y\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=2x^2} dx \\ &= \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(15) p39 l13:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 g(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}} x^3 y\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y/2}}^{1} x^3 y\,dx\,dy \\ &= \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(16) p60 l-4: para qualquer caminho fechado γ seccionalmente C^1, onde Γ é a curva parametrizada por γ

(17) p62 l-7 a l-4: Temos assim, usando a regra de Leibniz (Teorema 6.5.8) para trocar o integral com a derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[X_j \circ \gamma(t)\,(x_j - p_j)\right]\,dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n (\nabla X_j \circ \gamma(t)\,t(x_j - p_j)\,e_i) + X_i \circ \gamma(t)\right]\,dt \end{aligned}$$

(18) p94 Exemplo 6.1.5: Seja $\varphi_1(x) = [x]$ a parte inteira[1] de x e $\varphi_2(x) = [x^2]$. Então, $\int_{[0,10]} \varphi_1\,dm = 0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ e $\int_{[0,2]} \varphi_2\,dm = 5 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

(19) p36: incluir no final da secção 2.1:

Observação 2.2. No teorema 6.4.1 encontra-se um critério de integrabilidade à Riemann. Em particular, qualquer função contínua num intervalo compacto é integrável à Riemann.

(20) p86: Demonstração do Teorema 5.1.2:

Demonstração. Pela definição, 1) implica todas as outras proposições.

Para provar que 2) é equivalente a 5) comecemos por considerar $I =]-\infty, a]$. Assim, $f^{-1}(I) = f^{-1}(]a, +\infty[^c) = f^{-1}(]a, +\infty[)^c \in \mathcal{F}$. No caso 4), para $I =]-\infty, a[= \bigcup_k]-\infty, a - \frac{1}{k}]$ temos que $f^{-1}(I) =$

[1] $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}$.

$\bigcup_k f^{-1}(]-\infty, a-\frac{1}{k}]) \in \mathcal{F}$. Dinalmente, para 3), se $I = [a, +\infty[$ usamos a mesma ideia.

Falta provar que 2) implica 1). Seja $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \colon f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{B}$. Temos assim que $\mathcal{I} = \{]a, +\infty[\colon a \in \mathbb{R}\}$ está contido em $\mathcal{A}$. Se mostrarmos que $\mathcal{A}$ é uma σ-algebra (Exercício!), sabendo que $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}$, temos que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Ou seja, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e f é mensurável. □

(21) p47 l-2: onde $M \subset \bigcup_i U_i \cup \bigcup_j S_j$ e U_i são os termos de uma sucessão de conjuntos abertos disjuntos dois a dois (i.e. $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$) correspondendo a parametrizações locais $\phi_i \colon V_i \to M \cap U_i$, e S_j são subconjuntos da união das fronteiras dos U_i.

Departamento de Matemática, ISEG, Universidade de Lisboa, Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal

Email address: `jldias@iseg.ulisboa.pt`