Notas de Análise Matemática I

João Lopes Dias*
Departamento de Matemática, ISEG
Universidade Técnica de Lisboa
Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal

6 de Dezembro de 2011

Resumo

Estas notas destinam-se à cadeira "Análise Matemática I" do 1º ano da Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão do ISEG - Universidade Técnica de Lisboa.

Conteúdo

*Email: jldias@iseg.utl.pt

1 Noções de lógica matemática

1.1 Proposições

Uma **proposição** é uma afirmação que é qualificada de verdadeira (V) ou falsa (F) – não há 3ª hipótese.

Exemplo 1.

1. $p =$"Portugal tem 18 distritos" (V – pelo menos em 2006!)
2. $q =$"zero é um número inteiro" (V)
3. $r =$"Sevilha é a capital de Espanha" (F)

Observação 1. Existem afirmações que não podem ser qualificadas de verdadeiras ou falsas. Por exemplo, "Esta frase é F". Se é F, então é V (contradição). Se por outro lado ela é V, então é F (contradição). Este tipo de afirmações não são consideradas proposições porque dão origem a uma contradição lógica. Logo, não serão objecto do nosso estudo.

O objectivo da lógica matemática é o de relacionar proposições através do seu símbolo lógico: V ou F. Iremos estar sobretudo interessados naquelas que são V.

1.2 Operações entre proposições

Sejam p e q proposições. Definimos as seguintes operações básicas entre proposições. O resultado é ainda uma proposição.

- $\sim p$, **negação** de p (não se verifica p).
- $p \wedge q$, **conjunção** (verificam-se p e q)
- $p \vee q$, **disjunção** (verifica-se p ou q)
- $p \Rightarrow q$, **implicação** (se p se verifica, então q verifica-se)
- $p \Leftrightarrow q$, **equivalência** (p verifica-se sse[1] q verifica-se)

Exemplo 2. Aproveitando as proposições p, q e r no Exemplo 1,

1. $\sim p =$"Portugal não tem 18 distritos" (F)
2. $p \wedge q =$"Portugal tem 18 distritos e zero é um número inteiro" (V)
3. $p \vee r =$"Portugal tem 18 distritos ou Sevilha é capital de Espanha" (V)
4. "Se Portugal tem 18 distritos, então Portugal tem mais de 15 distritos" (V)
5. "$x = 0$ sse $|x| = 0$" (V)

O valor lógico da proposição obtida por operações entre proposições é descrito pela seguinte tabela de verdade:

[1] se e só se

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$	$(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V	V	V	V

Recorrendo a estas e construindo outras tabelas ficam provadas como V as seguintes relações.

Propriedades 1.1.

1. $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
3. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
4. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
5. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
6. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
7. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
8. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q))$

Exemplo 3. Considere as seguintes proposições:

- $p =$"Os homens são mortais"
- $q =$"Os cães vivem menos que os homens"
- $r =$"Os cães não são imortais"

Assim, a relação $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q))$ pode ler-se como:

> Dizer que "se os homens são mortais e os cães vivem menos que os homens, então os cães são mortais", equivale a dizer que "se os cães são imortais, então ou os homens são imortais ou os cães vivem mais que os homens".

1.3 Símbolos

Na escrita matemática de proposições utilizam-se frequentemente os seguintes símbolos:

- $\forall$, lê-se para todo (para qualquer).
- $\exists$, lê-se existe pelo menos um.
- $:$, lê-se tal que.
- Uma vírgula usualmente significa "e".

Exemplo 4.

1. $\forall_{x \geq 0} \exists_{y \geq 1} : x + y \geq 1$. "Para qualquer x não negativo existe y não negativo tal que $x + y$ não é menor que 1". (V)

2. $\forall y$ múltiplo de 4 $\exists x \geq 0\colon -\frac{1}{2} < x + y < \frac{1}{2}$. "Para qualquer y múltiplo de 4 existe x não negativo tal que $x + y$ encontra-se estritamente entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$". (F)

A negação dos símbolos é dada por

$$\sim \exists_x p(x) \Leftrightarrow \forall_x \sim p(x)$$

onde p é uma proposição que depende de x.

1.4 Indução matemática

Seja $p(n)$ uma proposição que depende de um número n que pode ser $1, 2, 3, \ldots$. Queremos provar que $p(n)$ é V para qualquer n. O chamado **princípio da indução matemática** é um método que permite fazer a demonstração para todos os n em apenas em dois passos:

1. Mostrar que $p(1)$ é V.
2. Supondo que $p(m)$ é V para um m fixo, mostrar que então a proposição consecutiva $p(m + 1)$ também é V.

Este método funciona porque se é V para $n = 1$ e para a consecutiva de qualquer que seja V, então é V para $n = 2, 3, \ldots$.

Exemplo 5. Considere as proposições $p(n)$ dadas para cada n por

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n + 1)n}{2}.$$

Para $n = 1$, temos que $p(1)$ se reduz simplesmente a $1 = 1$ que é obviamente V. Supondo agora que $p(m)$ para um m qualquer mas fixo. I.e. assumimos que $1 + 2 + \cdots + m = \frac{(m+1)m}{2}$. Então,

$$1 + \cdots + m + (m + 1) = \frac{(m + 1)m}{2} + (m + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}.$$

Ou seja, acabámos de provar que $p(m + 1)$ é V. Logo $\forall_n p(n)$ é V.

Este é um dos métodos de demonstração mais usados em todas as sub-áreas da matemáticas, em ciências da computação, em economia, em finanças e em praticamente todas as ciências onde se usam métodos quantitativos. Um matemático profissional tem a obrigação de dominá-lo.

2 Noções de teoria de conjuntos

2.1 Conjuntos

Um **conjunto** é uma colecção finita ou infinita de elementos. Um conjunto denominado A representa-se na forma:

$$A = \{a, b, c, \ldots\}$$

onde $a, b, c, \ldots$ são os elementos de A. Também usamos a seguinte representação para um conjunto:

$$A = \{x \colon p(x) \text{ é V}\}$$

onde $p(x)$ é uma proposição que depende de x. Esta representção lê-se "A é o conjunto dos elementos x para os quais $p(x)$ é V".

Escrever

$$a \in A$$

significa que a é um elemento de A (a pertence a A). Se α não pertence a A escrevemos $\alpha \notin A$. O número $\#A$ é **cardinal** de A, i.e. o número de elementos do conjunto. Se $\#A$ é finito então A é um **conjunto finito**. Se $\#A = \infty$ diz-se que A é infinito. Por fim, se $\#A = 0$ então $A = \{\} = \emptyset$ é o conjunto vazio.

Exemplo 6.

1. $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ é finito, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ é infinito, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ também é infinito.

2. O conjunto dos números racionais (razão entre inteiros) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ é infinito.

3. $1 \in \{1\}$, $\{1\} \notin \{1\}$, $\{1\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Observação 2. Nem todas as colecções de elementos serão considerados conjuntos. Por exemplo, considere A como o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios. Se A é um desses conjuntos, i.e. $A \in A$, então $A \notin A$ pois não é elemento de si próprio (contradição). Da mesma forma, se $A \notin A$, então $A \in A$ (contradição). Este tipo de colecção não é considerada conjunto pois dá origem a uma contradição lógica.

2.2 Igualdade e inclusão de conjuntos

Sejam A e B quaisquer dois conjuntos.

- $A = B$ (A é igual a B) sse $(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \vee (A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$.

- $A \subset B$ (A está contido em B) sse $(x \in A \Rightarrow x \in B) \vee A = \emptyset)$.

Propriedades 2.1.

1. $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$

2. $A \subset A$

3. $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B$

4. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

Observação 3. Se representarmos os conjuntos

$$A = \{x \colon p(x) \text{ é V}\} \quad \text{e} \quad B = \{x \colon q(x) \text{ é V}\} \tag{2.1}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são proposições que dependem de x, então temos que

$$A = B \Leftrightarrow \forall_x (p(x) \Leftrightarrow q(x)) \quad \text{e} \quad A \subset B \Leftrightarrow \forall_x (p(x) \Rightarrow q(x)).$$

Demonstre as proposições anteriores.

2.3 Intersecção e união de conjuntos

Sejam A e B quaisquer dois conjuntos.

- $A \cap B = \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}$ é a **intersecção** de A com B.
- $A \cup B = \{x \colon x \in A \vee x \in B\}$ é a **união** de A com B.

Representando os conjuntos na forma (2.1), temos que

$$A \cap B = \{x \colon p(x) \wedge q(x) \text{ é V}\} \quad \text{e} \quad A \cup B = \{x \colon p(x) \vee q(x) \text{ é V}\}.$$

Exemplo 7. Sejam $A = \{x \colon |x| \leq 1\}$ e $B = \{x \colon x \geq 0\}$. Logo, $A \cap B = \{x \colon 0 \leq x \leq 1\}$ e $A \cup B = \{x \colon x \geq -1\}$.

Podemos ainda definir a intersecção infinita e a união infinita de conjuntos. Por exemplo, se tivermos uma sucessão infinita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ temos que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \colon \forall_n x \in A_n\} \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \colon \exists_n x \in A_n\}.$$

Propriedades 2.2. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então,

1. $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$ (comutatividade)
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associatividade)
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ (distributividade)
4. $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$ (idempotência)
5. $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$ (absorção)

2.4 Diferença e complementar de conjuntos

Seja X um conjunto qualquer e $A, B \subset X$.

- $A \setminus B = \{x \in X \colon x \in A \wedge x \notin B\}$ é a **diferença** entre A e B (lê-se A excepto B).
- $A^c = \{x \in X \colon x \notin A\}$ é o **complementar** de A.

Escrevendo os conjuntos na forma (2.1) podemos escrever:

$$A \setminus B = \{x \colon p(x) \wedge q(x) \text{ é V}\} \quad \text{e} \quad A^c = \{x \colon \sim p(x) \text{ é V}\}.$$

Propriedades 2.3.

1. $A \setminus B = A \cap B^c$
2. $A \cap A^c = \emptyset$
3. $A \cup A^c = X$.

2.5 Leis de Morgan

Proposição 2.4 (Leis de Morgan)**.**

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demonstração. Escrevendo os conjuntos na forma (2.1), temos que

$$(A \cap B)^c = \{x\colon \sim (p(x) \wedge q(x)) \text{ é V}\} = \{x\colon \sim p(x) \vee \sim q(x)) \text{ é V}\} = A^c \cup B^c.$$

A mesma ideia para a segunda lei de Morgan. □

2.6 O conjunto $\mathbb{R}$

O conjunto que nos vai interessar estudar em pormenor é o dos números reais. Estes generalizam os naturais, os inteiros e os racionais.

- x é um **número real** sse $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$ (expansão decimal) com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

  O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$. Note que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

3 Noções de teoria de funções

Dados dois conjuntos quaisquer A e B, uma **função** f é uma associação de cada $x \in A$ a um e um só $y = f(x) \in B$.

Representação:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Notação:

- A domínio de f.
- B conjunto de chegada.
- $f(C) = \{y \in B\colon \exists_{x \in C} y = f(x)\}$ imagem de $C \subset A$.
- $f(A)$ contradomínio.
- $f^{-1}(D) = \{x \in A\colon f(x) \in D\}$ pré-imagem de $D \subset B$.

Exemplo 8.

1. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \mathbb{N}$ e f a função $f\colon A \to B$ definida pela tabela seguinte:

x	a	b	c	d
$f(x)$	3	5	7	9

Então, $f(\{b,c\}) = \{5,7\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{3,5\}) = \{a,b\}$, $f^{-1}(\{n \in \mathbb{N} \colon \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$.

2. Seja $u \colon \mathbb{N} \to \{-1,1\}$ dado por $u_n = u(n) = (-1)^n$. Então, $u(\mathbb{N}) = \{-1,1\}$, $u^{-1}(\{1\}) = \{2n \colon n \in \mathbb{N}\}$, $u^{-1}(\{-1\}) = \{2n-1 \colon n \in \mathbb{N}\}$.

3. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$
Logo, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$, $f([1,+\infty[) = \{1,2\}$, $f^{-1}([2,+\infty[) =]-\infty,-2] \cup]1,+\infty[$, $f^{-1}(\{1,2\}) = \{-1,-2\} \cup [1,+\infty[$.

3.1 Injectividade e sobrejectividade

Note que, segundo a definição de funções, a cada x no domínio da função corresponde um único ponto y no contradomínio. Porém, pode existir um ponto y no contradomínio que é a imagem de dois pontos diferentes x_1 e x_2 no domínio. Isso não se passa para as funções injectivas (ou $1-1$). Por outro lado, podem existir pontos no conjunto de chegada que não são imagem de nenhum ponto do domínio. Isto quer dizer que o contradomínio é "menor" que o conjunto de chegada. Esta situação não se passa para as funções sobrejectivas.

Seja $f \colon A \to B$.

- f é **injectiva** sse $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f é **sobrejectiva** sse $f(A) = B$.
- f é **bijectiva** sse é injectiva e sobrejectiva.

As funções bijectivas são importantes no estudo de muitos problemas. Isto porque relaciona cada elemento do conjunto A com cada elemento de B de uma forma um-para-um. Em particular, teremos os mesmos números de elementos em A e em B.

3.2 Função inversa

Um facto de especial relevância das funções injectivas é que podemos "desfazer" a transformação sem perigo de ambiguidades. Isto significa que a função é invertível.

Se $f \colon A \to B$ é injectiva, existe a **função inversa** $f^{-1} \colon f(A) \to A$ tal que
$$\forall_{x \in A} f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{e} \quad \forall_{y \in f(A)} f(f^{-1}(y)) = y.$$

Exemplo 9.

1. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Não é invertível pois não é injectiva. E.g. $f(1) = f(-1)$. Porém, se restringirmos o domínio a $\mathbb{R}_0^+$, a função já é invertível. I.e. a função $g \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ é injectiva e $g(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$. De $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, escrevemos $g^{-1} \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = \sqrt{x}$.

2. Seja $\sin \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função seno. Esta função é injectiva se restringirmos a determinados conjuntos. Por exemplo, $\sin \colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ já é injectiva e invertível. Note que $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$. Assim, definimos a função arco-seno $\arcsin \colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ que a um valor $x \in [-1,1]$ corresponde o ângulo em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cujo seno é x. Finalmente, temos que $\arcsin(\sin x) = \sin(\arcsin x) = x$.

3. De forma semelhante podemos definir a inversa do coseno quando o restringimos ao intervalo $[0, \pi]$. Ou seja, a função arco-cosseno $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ aplicada a $x \in [-1, 1]$ dá-nos o ângulo cujo coseno é x. Consequentemente, $\arccos(\cos x) = \cos(\arccos x) = x$.

4. Também a tangente pode ser invertível quando a definimos apenas no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Obtemos então a função arco-tangente $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ com a propriedade $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

5. A função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ é injectiva e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. A inversa é definida pela função logaritmo $f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log x$.

3.3 Composição de funções

Depois de calcularmos $g(x)$ como a imagem de x por uma função g, em inúmeras situações pretendemos aplicar ainda outra função f (ou a mesma) a $g(x)$, ou seja $f(g(x))$. Diz-se que estamos a compôr duas funções. Sejam $g\colon A \to B$ e $f\colon C \to D$. Definimos a **função composta** da seguinte forma

$$\begin{aligned} f \circ g\colon g^{-1}(C) &\to D \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \end{aligned}$$

(lê-se f composta com g ou f após g).

Exemplo 10. Sejam $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - 2x$ e $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$. Temos que $g^{-1}([1, +\infty[) = \mathbb{R}_0^-$. Assim, $f \circ g\colon]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(1 - 2x) = \sqrt{-2x}$.

Proposição 3.1. *Se f e g são injectivas, então $f \circ g$ é injectiva e*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Demonstração.

- Comecemos por mostrar que $f \circ g$ é injectiva. Se $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2) \Leftrightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, então como f é injectiva, $g(x_1) = g(x_2)$. Além disso, como g é injectiva, isto implica que $x_1 = x_2$.

- Vamos provar agora que $g^{-1} \circ f^{-1}$ é inversa de $f \circ g$:

  - $g^{-1} \circ f^{-1}(f \circ g(x)) = g^{-1}(f^{-1}(f(g(x)))) = g^{-1}(g(x)) = x$,
  - $f \circ g(g^{-1} \circ f^{-1}(x)) = f(g(g^{-1}(f^{-1}(x)))) = f(f^{-1}(x)) = x$,

  onde usámos o facto de f^{-1} e g^{-1} serem as inversas de f e g, respectivamente.

- Falta provar que a inversa é única. (Absurdo) Suponhamos que existe outra função inversa de $f \circ g$ denominada u diferente de $g^{-1} \circ f^{-1}$. Então, $f \circ g(u(x)) = x$. Se aplicarmos a função $g^{-1} \circ f^{-1}$, logo $g^{-1} \circ f^{-1}(f \circ g(u(x))) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) \Leftrightarrow u(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ que contradiz a nossa hipótese.

$\square$

4 Noções topológicas em $\mathbb{R}$

4.1 Distância

A **distância** usual entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{4.1}$$

Podemos então facilmente deduzir as seguintes propriedades.

Propriedades 4.1. Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$,

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

De facto poderíamos ter definido uma distância[2] apenas pelas propriedades acima, pois são as que serão relevantes na utilização da noção de distância. Um exemplo de uma outra distância d em $\mathbb{R}$, verificando as mesmas propriedades é:

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Note que com esta distância temos que $d(0, 1) = d(1, 2) = \frac{1}{2}$ e que $d(0, 2) = \frac{2}{3}$. Por outro lado, não existem pontos que distem entre si mais do que 1.

Iremos restringir o nosso estudo somente à distância usual dada em (4.1). Porém, com algum cuidado poderíamos desenvolver todo o nosso estudo para uma distância genérica.

4.2 Vizinhança

Uma das principais consequências do facto de sabermos medir distâncias é a noção de proximidade. Queremos definir os pontos "vizinhos" (em relação à distância escolhida) a um determinado ponto $a \in \mathbb{R}$. Assim, a **vizinhança** $\varepsilon > 0$ de a é o conjunto de pontos que distam menos que ε de a. I.e.

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \colon d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Para a distância usual (que iremos utilizar sempre nestas notas), temos que

$$V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Propriedades 4.2.

1. Se $0 < \delta < \varepsilon$, então $V_\delta(a) \subset V_\varepsilon(a)$ e $V_\delta(a) \cap V_\varepsilon(a) = V_\delta(a)$.
2. $\bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(a) = \{a\}$ não é uma vizinhança de a.
3. Se $a \neq b$, então $V_\delta(a) \cap V_\varepsilon(a) = \emptyset \Leftrightarrow \delta + \varepsilon \leq |b - a|$.

[2] Nalguma literatura diz-se métrica.

4.3 Interior, Fronteira e Exterior

Com a noção de vizinhança de um ponto, podemos distinguir os pontos que estão no "interior" de um conjunto. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

- a é **interior** a A sse existe uma vizinhança de a totalmente contida em A, i.e.
$$\exists_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(a) \subset A.$$
- a é **exterior** a A sse a é interior a A^c (o complementar de A).
- a é **fronteiro** a A sse não é nem interior nem exterior a A.

O conjunto dos pontos interiores a A é chamado $\operatorname{int} A$, o exterior $\operatorname{ext} A$ e a fronteira $\operatorname{front} A$. Assim,
$$\mathbb{R} = \operatorname{int} A \cup \operatorname{front} A \cup \operatorname{ext} A.$$

Exemplo 11.

1. $\operatorname{int}[0,1[=]0,1[$, $\operatorname{front}[0,1[=\{0,1\}$, $\operatorname{ext}[0,1[=\mathbb{R}\setminus[0,1]$.
2. $\operatorname{int}\emptyset = \operatorname{front}\emptyset = \operatorname{ext}\mathbb{R} = \operatorname{front}\mathbb{R} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\emptyset = \operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$.
3. $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \operatorname{ext}\mathbb{Q} = \operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \operatorname{ext}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\operatorname{front}\mathbb{Q} = \operatorname{front}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
4. $\operatorname{int} K = \emptyset$, $\operatorname{front} K = K$, onde K é o conjunto de Cantor.

Propriedades 4.3.

1. $\operatorname{int}(A^c) = \operatorname{ext} A$.
2. $\operatorname{ext}(A^c) = \operatorname{int} A$.
3. $\operatorname{front}(A^c) = \operatorname{front} A$.
4. $\operatorname{int} A \subset A$.
5. $\operatorname{ext} A \subset A^c$.

4.4 Conjuntos abertos e fechados

Dado $A \subset \mathbb{R}$, o **fecho** de A é
$$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \operatorname{front} A.$$
Logo $\mathbb{R} = \overline{A} \cup \operatorname{ext} A$.

Propriedades 4.4. $\operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A}$.

No caso de termos igualdades na propriedade anterior, damos nomes especiais ao conjunto:

- A é **aberto** sse $\operatorname{int} A = A$.
- A é **fechado** sse $A = \overline{A}$.

Exemplo 12.

1. $]0,1[$ é aberto, $[0,1]$ é fechado, $]0,1]$ não é aberto nem fechado, $]-\infty,1]$ é fechado.

2. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são fechados, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não são abertos nem fechados.

3. $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são abertos e fechados.

Observação 4. A negação da proposição "A é aberto" não é "A é fechado" mas sim "A não é aberto".

Teorema 4.5.

1. *$A \subset \mathbb{R}$ é aberto sse A^c é fechado.*

2. *Se $A, B \subset \mathbb{R}$ abertos, então $A \cap B, A \cup B$ abertos.*

3. *Se $A, B \subset \mathbb{R}$ fechados, então $A \cap B, A \cup B$ fechados.*

4. *Se $A \neq \emptyset$ é limitado e fechado (compacto), então tem máximo e mínimo.*

Demonstração.

1. A aberto $\Leftrightarrow$ $\operatorname{front} A \subset A^c \Leftrightarrow \operatorname{front} A^c \subset A^c \Leftrightarrow A^c$ fechado.

2. Seja $a \in A \cap B$. Então, como A e B são abertos, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$V_{\varepsilon_1}(a) \subset A \quad \text{e} \quad V_{\varepsilon_2}(a) \subset B.$$

   Escolhendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, temos que

$$V_{\varepsilon}(a) \subset V_{\varepsilon_1}(a) \cap V_{\varepsilon_2}(a) \subset A \cap B.$$

   A mesma ideia para $A \cup B$.

3. A e B fechados $\Leftrightarrow$ A^c e B^c abertos $\Rightarrow$ $A^c \cup B^c$ aberto $\Leftrightarrow$ $(A \cap B)^c$ aberto $\Leftrightarrow$ $A \cap B$ fechado. Mesma ideia para $A \cup B$.

4. A majorado $\Rightarrow$ $\sup A \in \operatorname{front} A$. Como A é fechado, i.e. $\operatorname{front} A \subset A$, temos que $\sup A \in A$. Logo, $\max A = \sup A$. Mesma ideia para inf e min.

□

Observação 5. O seguinte exemplo

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

mostra que a intersecção infinita de abertos pode não ser um aberto. No teorema anterior apenas se prova que a intersecção finita de abertos é um aberto. Também a união infinita de fechados pode não ser um fechado. Por exemplo,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] =]-1, 1[.$$

4.5 Pontos de acumulação

Note em primeiro lugar que para $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset.$$

I.e. um ponto a pertence ao fecho de A (é interior ou fronteiro a A) sse qualquer vizinhança de a intersecta A.

Estamos agora interessados nos pontos do fecho de A que têem seguramente em seu redor outros pontos do conjunto. Ou seja, que não são pontos isolados:

- $a \in A$ é **ponto isolado** de A sse $\exists_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(a) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$.

Assim, definimos

- a é **ponto de acumulação** de A sse $\forall_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

Os pontos de acumulação são assim os elementos do fecho de A menos os que são isolados.

O conjunto dos pontos de acumulação é denotado A' e chama-se **derivado** de A.

Exemplo 13.

1. $([0, 1[)' = [0, 1]$.
2. $(\{0, 1\})' = \emptyset$.
3. $(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\})' = \{0\}$.
4. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

Referências

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, 6ª ed, 1995.

[2] J. Campos Ferreira. *Elementos de Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos*. DM-IST, 2001.

[3] A. Gregório Luís. *Elementos de Análise Real*. AEISEG, 2002.

[4] A. Gregório Luís. *Elementos sobre Teoria dos Conjuntos*. AEISEG, 2002.